I. megoldás: Tegyük fel a feladat állításával ellentétben, hogy van olyan szomszédos természetes számokból álló pár, amelyek közül az első egy páros szám négyzete, a második egy négyzetszám 3-szorosa. Ezek $(2k)^2 = 4k^2$, illetőleg $3n^2$ alakban írhatók, tehát $4k^2 + 1 = 3n^2$. Itt a bal oldal páratlan, ezért a jobb oldal is, tehát $n = 2m + 1$. Ezzel feltevésünk a $4k^2+1 = 3(4m^2+4m+1) = 4(3m^2+3m)+3$ alakot veszi fel, ami nyilván lehetetlen, mert 4-gyel osztva a bal oldal maradéka 1, a jobb oldalé 3. Eszerint feltevésünk helytelen, az állítás első része igaz.

Hasonlóan nem állhat fenn az $r^2 + 1 = 7s^2$ egyenlőség sem, mert s-nek páros r mellett páratlannak kell lennie, páratlan r mellett pedig párosnak és ezek mindegyikéből ellentmondásra jutunk, ismét a 4-gyel való oszthatóság szempontjából, mert egyrészt

$$(2k)^2 + 1 = 4k^2 + 1 \quad \text{és} \quad 7(2m+1)^2 = 4(7m^2 + 7m + 1) + 3,$$

másrészt

$$(2k+1)^2 + 1 = 4(k^2 + k) + 2 \quad \text{és} \quad 7(2m)^2 = 4(7m^2) + 0.$$

Kászonyi László (Szombathely, Nagy Lajos g. I. o. t.)

II. megoldás: Az állításnál több is igaz: egy természetes szám négyzetére következő szám sem lehet semmiféle természetes számnak a 3-szorosa. Ugyanis minden természetes szám vagy $3k$, vagy $3k+1$, vagy $3k+2$ alakban írható, ezért négyzete vagy $3(3k^2)$, vagy $3(3k^2+2k)+1$, vagy $3(3k^2+4k+1)+1$ alakú, így a rákövetkező szám az első esetben $3m+1$, a további kettőben $3m+2$ alakú, tehát nem többszöröse 3-nak.

Hasonlóan a 7-tel való oszthatóság szempontjából minden szám a következő alakok egyikében írható:

$$7k, \qquad 7k \pm 1, \quad 7k \pm 2, \quad 7k \pm 3,$$

tehát a négyzetére következő szám

$$7(7k^2) + 1, \quad 7(7k^2 \pm 2k) + 2, \quad 7(7k^2 \pm 4k) + 5, \quad 7(7k^2 \pm 6k + 1) + 3$$

alakú, eszerint nem lehet semmilyen egész számnak 7-szerese, többek között négyzetszámnak sem.

Ámon Magdolna (Győr, Zrínyi Ilona lg. I. o. t.)