$\overline{abcd}$-ben c és d helyére 0-t írva kisebb számot kapunk, vagy esetleg magát az eredeti számot (ha ti, $c=d=0$). Az $\overline{ab00}$ szám viszont egyenlő az $\overline{ab}\cdot 100$ szorzattal. A 100-as tényező helyett $\overline{cd}$-t írva $\overline{ab}\cdot\overline{cd}$-ben az eredeti $\overline{abcd}$-nél biztosan kisebb szám áll előttünk. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Ha a, b, c, d mindegyike 0 is lehet, akkor $\overline{abcd}$ egyenlő is lehet $\overline{ab}\cdot\overline{cd}$-vel, de csak a semmitmondó $a=b=c=d=0$ esetben.

Az állítás kétféleképpen általánosítható. I. Akkor is igaz az egyenlőtlenség, ha a bal oldalon négyjegyű szám helyett *tetszés szerinti számú* (de legalább két) jeggyel írt (pozitív egész) számot veszünk, abból úgy alakítunk *két* számot, hogy jegyeit valahol kettévágjuk, és sorrendjüket változatlanul hagyjuk; e két szám szorzata kisebb az eredeti számnál (általánosítás a két tényező jegyeinek száma szempontjából). Ugyanis az eredeti számnál semmi esetre sem kapunk nagyobbat, ha zérusokkal pótoljuk azokat a jegyeit, amelyek a kettévágással a második számba kerültek. Ez a szám egyenlő azzal a szorzattal, amelynek első tényezője a kettévágással keletkezett első szám, második tényezőjében pedig egy 1-es után annyi 0 áll, mint ahány jegye van a második számnak. Az utóbbi tényező nagyobb a második számnál, mert jegyeinek száma 1-gyel több; így ha ezt a második számmal pótoljuk, a szorzat kisebb az eredeti számnál.

II. Akkor is igaz az egyenlőtlenség, ha bal oldalán tetszés szerinti számú jeggyel írt (de legalább háromjegyű) szám áll, és abból az előbbi elv szerint *kettőnél több* számot alakítunk (általánosítás a tényezők száma szempontjából). Ezt úgy láthatjuk be, hogy az eredeti szám tervbe vett felszeletelését szakaszonként végezzük: egy szakaszban csak egy helyen vágjuk ketté a szám – ill. egy része – jegyeinek sorozatát, I. alapján felírjuk, hogy e két rész szorzata kisebb az éppen kettészelt számnál, végül ezt az egyenlőtlenséget megszorozzuk a most változatlanul hagyott számmal, vagy az ilyenek szorzatával. Ha a szeletelési helyeken balról jobbra haladunk végig, akkor az I. eredményt mindig a megelőző kettészeléssel kapott második számra alkalmazzuk. Megmutatjuk pl. hogy $\overline{abcdefgh}>\overline{abc}\cdot\overline{de}\cdot f\cdot\overline{gh}$ Valóban, I. alapján

$$\overline{abcdefgh}>\overline{abc}\cdot\overline{defgh} \tag{1}$$

és

$$\overline{defgh}>\overline{de}\cdot\overline{fgh}, \tag{2}$$

(2)-t $\overline{abc}$-vel szorozva

$$\overline{abc}\cdot\overline{defgh}>\overline{abc}\cdot\overline{de}\cdot\overline{fgh} \tag{3}$$

(1) és (3) egybevetéséből $\overline{abcdfgh}>\overline{abc}\cdot\overline{de}\cdot\overline{fgh}$ Hasonlóan $\overline{fgh}>f\cdot\overline{gh}$, ezt $\overline{abc}\cdot\overline{de}$-vel szorozva és az előbbi eredménnyel egybevetve a bizonyítani kívánt egyenlőtlenséget nyerjük. A bizonyítás eggyel kevesebb szakaszból áll, mint ahány számra szeleteljük fel az eredeti számot.

Dóra Levente (Budapest, I. László Gimn. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Több versenyző a, b, c, d-t helytelenül *különböző* számjegyeknek tekintette, pedig ez nem volt kikötve és nincs is befolyással. Tanuljuk meg azt is kivenni, „kiolvasni" a szövegből, ami nincs ott, mert nem kell ott lennie. Ha a szöveg nem tartalmaz megszorítást, akkor nincs megszorítás.

2. Az utóbbi általánosítást egészen általánosan így írhatjuk fel (az indexszel ellátott j-k számjegyeket jelentenek):

$$\overline{j_1j_2\dots j_n}>\overline{j_1j_2\dots j_{k_1}}\cdot\overline{j_{k_1+1}\dots j_{k_1+k_2}}\cdot\overline{j_{k_1+k_2+1}\dots j_{k_1+k_2+k_2}}\cdot\ldots\cdot\overline{j_{k_1}+\ldots+k_{r-1}+1\dots j_{k_1}+\ldots+k_r}$$

vagyis a jobb oldali tényezők száma r, bennük a jegyek száma rendre $k_1,k_2,\dots,k_r$ és $k_1+k_2+\ldots+k_r=n$. Az első tényezőben j_2 természetesen csak akkor szerepel, ha k_1 nagyobb 1-nél; hasonlóan a tényezők első és utolsó jegye nem értendő kétszer, ha a megfelelő k értéke 1.

Trócsányi Zénó (Sárospatak, Rákóczi Gimn. II. o. t.)

3. Néhány versenyző (szám szerint 4) nem ismerte az $\overline{abcd}$ jelölésben a felső vonás jelentését, ezért azt figyelmen kívül hagyta, és így a feladatot félreértette. A jelölést megmagyarázó lábjegyzet a kitűzésnél tévedésből elmaradt.