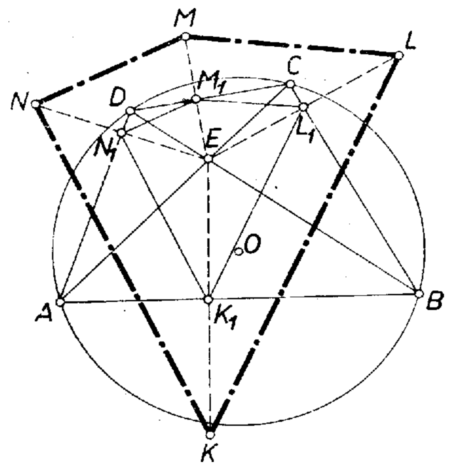
I. megoldás: Legyenek az E-ből az oldalakra bocsátott merőlegesek talppontjai rendre K_1, L_1, M_1, N_1 (1. ábra).



1. ábra

Ezek felezik az EK, EL, EM, EN szakaszokat, ezért a $K_1, L_1, M_1, N_1 = Q_1$ négyszög hasonló helyzetű $KLMN = Q$-hoz, a hasonlóság középpontja E, aránya $1:2$. Elég tehát az állítás igazolásául Q_1-ről megmutatni, hogy érintőnégyszög és érintő körének középpontja E, akkor ugyanez áll Q-ra is, mert E a hasonlósági transzformációban önmagának a megfelelője.

Q_1 érintőnégyszög, mert szögeit EK_1, EL_1, EM_1, EN_1 rendre felezik. Elég ezt pl. EK_1-re és az L_1, K_1, N_1 szögre belátni, mert Q-nak egyetlen oldala, csúcsa sincs kitüntetve, ezért Q_1-nek sem, és így bizonyításunk Q_1 bármelyik szögére érvényes.

EN_1AK_1 és EL_1BK_1 húrnégyszögek, mert szemközti N_1 és K_1 ill. L_1, és K_1 csúcsuknál fekvő szögeik derékszögek. Ezért a Q_1-ben a K_1-nél fekvő szög két része a kerületi szögek tétele alapján

$$\varepsilon_1 = EK_1N_1\sphericalangle = EAN_1\sphericalangle = CAD\sphericalangle,$$
$$\varepsilon_2 = EK_1L_1\sphericalangle = EBL_1\sphericalangle = DBC\sphericalangle,$$

(felhasználtuk, hogy E mindkét átlón rajta van és hogy N_1, L_1, az AD, ill. BC oldalon van). Az utóbbi szögek az $ABCD$ négyszög köré írt körnek az A, B csúcsokat nem tartalmazó CD ívén nyugvó kerületi szögek, ezért egyenlők, tehát $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Ez az, amit bizonyítani akartunk.

Nováky Béla (Budapest, I. István g. II. o. t.)

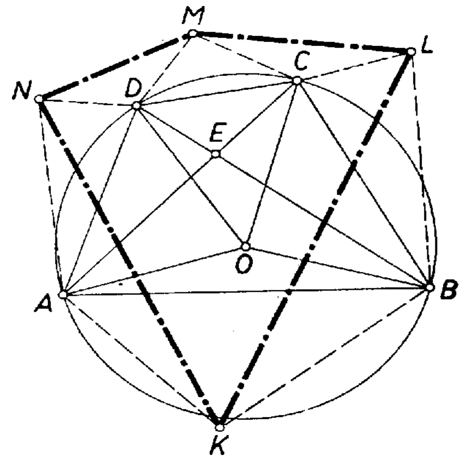
Megjegyzés. Lényegében ugyanezek felhasználásával magára Q-ra is bizonyíthatjuk az állítást, pl. hogy EK felezi Q-nak LKN szögét. A tükrözés folytán $AN = AE = AK$, ezért az NKE háromszög körülírt körének középpontja A, és hasonlóan a KLE háromszögé B. Másrészt AD, ill. BC az AEN, ill. BEL háromszögnek szimmetriatengelye, tehát felezi A, ill. B-nél fekvő szögüket. Így a kerületi és középponti szögek tétele alapján

$$\underline{EKN}\sphericalangle = EAN\sphericalangle/2 = EAD\sphericalangle = CAD\sphericalangle = CBD\sphericalangle = CBE\sphericalangle =$$
$$= LBE\sphericalangle/2 = \underline{LKE}\sphericalangle.$$

Állításunkat az egyenlőségsorozat szélső tagjainak összekapcsolása bizonyítja.

Dobó Ferenc (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. I. o. t.)

II. megoldás: Az előbbi megjegyzésben szereplő, továbbá az LME, MNE háromszögek köré írt C, ill. D középpontú körök felhasználásával megmutatjuk, hogy Q szemben fekvő oldalpárjainak összege ugyanakkora, ebből pedig, mint ismeretes, következik, hogy Q érintőnégyszög.



2. ábra

Az AKN, OBD és CLM háromszögek (2. ábra) hasonlók (O az eredeti kör középpontja), mert A-ból, O-ból, ill. C-ből kiinduló oldalaik egyenlők, és a köztük fekvő szög 2α (ill. $360^\circ - 2\alpha$, ha α tompaszög). Ebből

$$KN : AN = BD : OD = LM : CM$$

és tekintettel az $AN = AE$, $CM = CE$ egyenlőségekre

$$KN = \frac{BD}{OD} \cdot AE, \qquad LM = \frac{BD}{OD} \cdot CE,$$
$$\text{és így } KN + LM = \frac{BD}{OD}(AE + CE) = \frac{BD \cdot AC}{OD}.$$

Ugyanígy a BLK, OCA, DMN hasonló (a csúcsoknál 2β, ill. $360^\circ - 2\beta$ szögű) egyenlő szárú háromszögekből

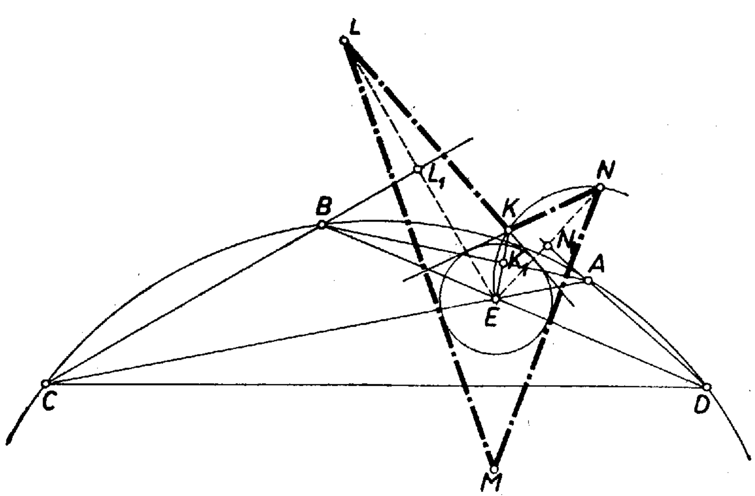
$$KL : BK = AC : OA = MN : DN,$$

és mivel $BK = BE$, $DN = DE$ és $OA = OD$, azért

$$KL = \frac{AC}{OA} \cdot BE, \qquad MN = \frac{AC}{OA} \cdot DE,$$
$$\text{és így } KL + MN = \frac{AC}{OA}(BE + DE) = \frac{AC \cdot BD}{OD}.$$

Ezzel állításunkat igazoltuk.

Megjegyzés. Egyetlen dolgozat: *Góth László*é (Budapest, Könyves Kálmán g. II. o. t.) mutatott rá arra, hogy ha az $ABCD$ négyszög nem foglalja magában körülírt körének O középpontját, akkor a $KLMN$ négyszög nem konvex, illetőleg háromszöggé fajul el, ha O pl. az CD oldalra esik. A bebizonyított tények ekkor is helytállók, van olyan kör, amely $KLMN$ mindegyik oldalának egyenesét érinti, valamint az átellenes oldalpárok összege is egyenlő.

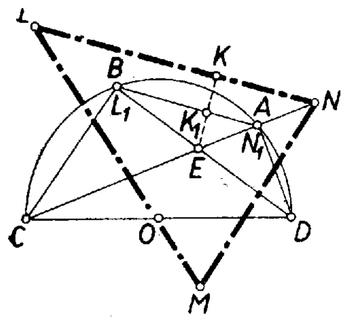


3. ábra

3.ábránk felvételén az I. megoldás EN_1AK_1 és EL_1BK_1 húrnégyszögeiben N_1 és K_1 valamint L_1 és K_1 nem szemközti csúcsok (ill. akkor szemköztiek, ha e négyszögeket hurkoltaknak tekintjük) másrészt N_1, L_1 az AD, ill. BC oldal meghosszabbításán van, ezért a következő számítás helyes:

$$\varepsilon_1 = EK_1N_1\sphericalangle = 180° - EAN_1\sphericalangle = CAD\sphericalangle,$$
$$\varepsilon_2 = EK_1L_1\sphericalangle = 180° - EBL_1\sphericalangle = DBC\sphericalangle.$$

A 4. ábrán a CAD és CBD szögek derékszögek, ezért N_1 az A-ba, L_1 a B-be esik, így N_1, K_1, L_1 az AB egyenesre esnek és így N, K, L is egy egyenes pontjai.



4. ábra

Ez is mutatja, milyen helytelen az az általános szokás, hogy a vizsgálódáshoz egyetlen ábrát vesznek alapul és azon is kerülik a „szokatlanságokat”.