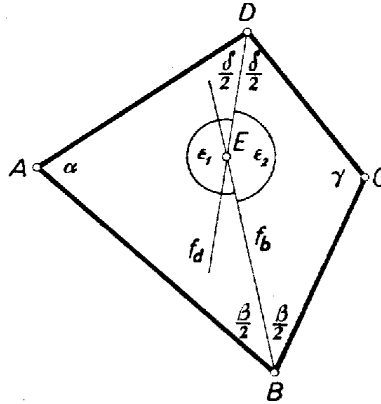


**I. megoldás:** Tegyük fel, hogy az adott szögek közül  $\alpha$  kisebb:  $\alpha < \gamma$ , továbbá, hogy a vizsgálandó  $f_b$  és  $f_d$  szögfelezők a négyszög belsejében metszik egymást, metszéspontjuk  $E$  (1. ábra).



1. ábra

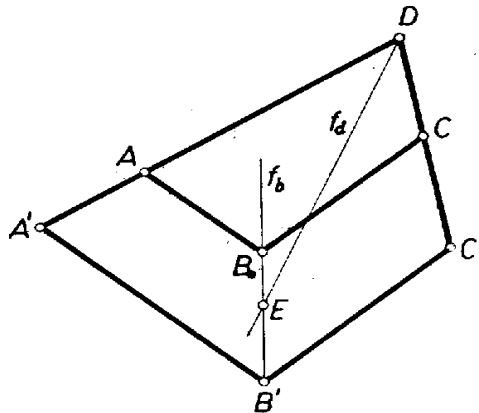
Így a  $BE, DE$  szakaszok az  $ABCD$  négyszöget az  $EDAB$  és  $EDCB$  négyszögekre vágják szét. Az  $E$  csúcsnál az  $EDAB$  négyszögben  $\varepsilon_1 = 360^\circ - \alpha - (\beta + \delta)/2$  nagyságú szög van, az  $EDCB$ -ben pedig  $\varepsilon_2 = 360^\circ - \gamma - (\beta + \delta)/2$  nagyságú. Ezek csak az  $\alpha$ , ill.  $\gamma$  kivonandóban térnek el, így a feltevésnél fogva  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ . Másrészt  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 360^\circ$ , tehát  $\varepsilon_1 > 180^\circ, \varepsilon_2 < 180^\circ$ , vagyis  $\varepsilon_1$  az  $E$  pontnál keletkező négy szög közül háromnak az összegét adja,  $\varepsilon_2$  pedig egy olyan szög nagyságát, amelynek terében nincs félegyenes a szögfelezőknek.

Megmutatjuk, hogy  $\varepsilon_2$  tompaszög, így a szögfelezők előírt hegyes szögeként kiegészítő szöge,  $\zeta = 180^\circ - \varepsilon_2$  veendő. Ugyanis  $\beta + \delta = 360^\circ - (\alpha + \gamma)$  alapján

$$\varepsilon_2 = 360^\circ - \gamma - \frac{\beta + \delta}{2} = 360^\circ - \gamma - 180^\circ + \frac{\alpha + \gamma}{2} = 180^\circ - \frac{\gamma - \alpha}{2}.$$

Négyszögünk konvexitása folytán  $\gamma$  és  $\alpha$  kisebbek  $180^\circ$ -nál, ugyanez áll különbségükre, így annak fele,  $\varepsilon_2$  utolsó alakjának kivonandója kisebb  $90^\circ$ -nál, ennél fogva  $\varepsilon_2$  valóban nagyobb  $90^\circ$ -nál. Eszerint a kérdéses hegyes szög:  $\zeta = (\gamma - \alpha)/2$ .

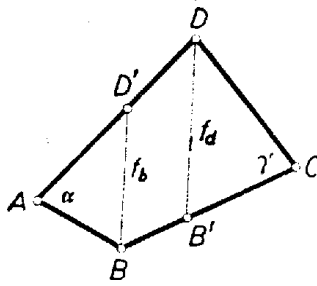
Az olyan eseteket, amelyekben  $f_b$  és  $f_d$ -nek  $E$  metszéspontja a négyszög kerületére, vagy a négyszögön kívülre esik, visszavezetjük a már vizsgált esetre. A négyszög kerületére csak úgy eshet  $E$ , ha vagy  $B$ -be, vagy  $D$ -be esik, mert a  $BA, BC$  egyeneseken  $f_b$ -nek nincs más pontja, mint  $B$ , a  $DA, DC$  egyeneseken pedig  $f_d$ -nek nincs más pontja, mint  $D$ . Legyen  $E$  a  $B$ -ben, ill.  $f_b$ -nek kifelé való meghosszabbításán (2. ábra).



2. ábra

Ekkor az  $f_b$ -nek a négyszögből kilépő meghosszabbításán,  $E$ -n túl felvett  $B'$  ponton át  $BA, BC$ -vel párhuzamosot húzva, és ezeknek  $DA, DC$ -vel való metszéspontját  $A', C'$ -vel jelölve az  $A'B'C'D'$  négyszög  $B'$  és  $D'$ -nél fekvő szögeinek felezői  $f_b$  és  $f_d$ , és ezek az új négyszögön belül metszik egymást. Ezért fenti eredményünk szerint  $\zeta = (\gamma' - \alpha')/2$  és ez egyenlő  $(\gamma - \alpha)/2$ -vel, mert az  $A'B'C'D'$  és  $ABCD$  négyszögek egymás utáni szögei egyállásúak, és ezért egyenlők.

A kérdéses szög nem létezik, ha  $f_b$  és  $f_d$  párhuzamosok vagy egybeesők. Ez csak akkor áll fenn, ha  $\alpha = \gamma$ . Messe ugyanis  $f_b, f_d$  az  $AD$ , ill.  $BC$  egyenest  $D'$ , ill.  $B'$ -ben (3. ábra).

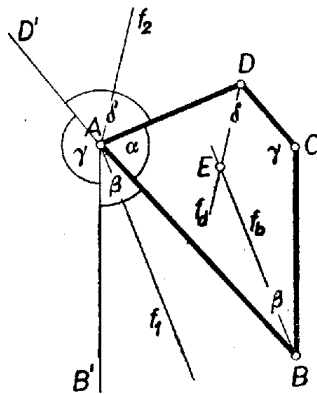


3. ábra

$f_b$  és  $f_d$  azonossága esetén  $D' \equiv D$ ,  $B' \equiv B$  és az  $ABCD$  négyszög deltoid, mert a felezések folytán  $BA$  és  $BC$ , valamint  $DA$  és  $DC$  egymás tükrös párjai  $f_b$ -re, és ezért  $\alpha = \gamma$ . Különben pedig  $CB'D \sphericalangle = CBD' \sphericalangle = \beta/2$  és  $AD'B \sphericalangle = ADB' \sphericalangle = \delta/2$ , mert egyállású szögek, vagyis a  $B'CD$  és  $BAD'$  háromszögek 2-2 szöge egyenlő, ezért harmadik szögeik is, amint állítottuk. Fordítva,  $\alpha = \delta$ -ból következik, hogy  $f_b$  és  $f_d$  egybeesők vagy párhuzamosak. – A kapott feltétel ellentétben áll a fenti  $\zeta$  megállapításában felhasznált  $\alpha < \gamma$  feltevessel, ezért a nyert  $\zeta$  érték itt nem használható. De a fenti értékek  $\alpha = \gamma$  esetére való felhasználása sem vezet hibára, mert  $\zeta = 0^\circ$ -ot ad, amit úgysem fogadunk el két egyenes hajlásszögének.

Góth László (Budapest, Könyves Kálmán g. II. o. t.)

**II. megoldás:** Nincs szükség eseteknek  $E$  helyzete szerinti megkülönböztetésére, ha a szöget nem kötjük helyhez, hanem csupán irányok közti elfordulásnak tekintjük. Toljuk el a  $CB, CD$  félegyeneseket  $C$ -pontnál fogva  $A$ -ba, új helyzetük  $AB'(\parallel CB)$   $AD'(\parallel CD)$ ; 4. ábra).



4. ábra

Ekkor az (egyenes szögnél kisebb)  $B'AD'$  szög a  $BCD = \gamma$  szöggel egyenlő, mert egyállásúak, és  $BAB'$  az  $ABC = \beta$ -val,  $DAD'$  az  $ADC = \delta$ -val egyeulő, mert váltószögek, tehát az  $A$  pontnál megjelent négyszögünknek mind a négy szöge. Legyen továbbá  $f_1, f_2$  az  $f_b, f_d$  szögfelezőkkel az  $A$ -n át húzott párhuzamosoknak az a félegyenes, amely az egyenes szögnél kisebb  $B'AB$ , ill.  $DAD'$  szög terében fekszik. Az  $f_b$  és  $f_d$  közti, keresett szögek egyenlők az  $f_1$  és  $f_2$  közti szögekkel. Ez utóbbiak pedig felezik a  $B'AB, DAD'$  szöget, mert pl.  $f_1$  és  $AB$  szöge váltószöge  $f_b$  és  $BA$  szögének, amely  $\beta/2$ -vel egyenlő. Már most  $f_1$ -ből  $f_2$ -be átfordulva egyik irányban  $\vartheta_1 = \beta/2 + \alpha + \delta/2 = \alpha + (\beta + \delta)/2$  szög van, a másik irányban  $\vartheta_2 = \beta/2 + \gamma + \delta/2 = \gamma + (\beta + \delta)/2$ . Továbbá  $\alpha = \gamma$  esetén  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 360^\circ/2 = 180^\circ$ , vagyis  $f_1$  és  $f_2$  egymás meghosszabbításai, tehát  $f_b, f_d$  párhuzamosak, vagy egybeesők,  $\alpha < \gamma$  esetén pedig  $\vartheta_1 < \vartheta_2$  tehát  $f_1$  és  $f_2$ -nek  $\vartheta_1$  a szokásos értelemben vett hajlásszöge. Ez  $(\alpha + \beta + \delta)/2 + \alpha/2 = 180^\circ - \gamma/2 + \alpha/2$  alakban is írható, és arról a fentiek szerint látjuk be, hogy tompaszög, számunkra kiegészítő szöge veendő,  $\zeta = 180^\circ - \vartheta_1 = (\gamma - \alpha)/2$ .

Bácskai Ferenc (Kecskemét, Piarista g. II. o. t.)

*Megjegyzés.* Teljeseknek csak azokat a dolgozatokat fogadtuk el, amelyekben legalább utalás van arra, hogy a szögfelezők a négyszögon kívül is metszhetik egymást, vagy arra, hogy  $\alpha$  és  $\gamma$  nagyságviszonya hogyan befolyásolja a végeredményt. Amely dolgozatok egyik kérdést sem érintettek, azokat hiányosaknak minősítettük.