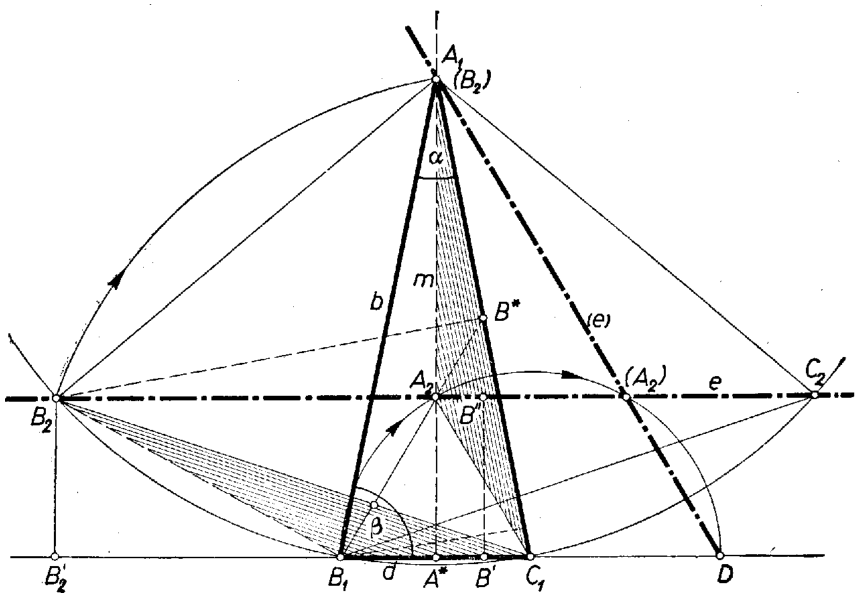
I. megoldás: Legyenek az $A_1B_1C_1 = H_1$ háromszög ($A_1B_1 = A_1C_1$) oldalaira befelé rajzolt szabályos háromszögek csúcsai A_2, B_2, C_2, és tegyük fel, hogy ezek égy e egyenesbe esnek. B_2, és C_2 a H_1 tengelyére szimmetrikus párok, ezért e vagy merőleges a tengelyre, vagy egybeesik vele. Az utóbbi esetben $B_2 \equiv C_2$, így A_1-nél $2 \cdot 60° = 120°$-os, B_1 és C_1-nél 30°-os szög van.[1]



A másik esetben e párhuzamos a B_1C_1 alappal, ezért A_2 és B_2-nek B_1C_1 fölötti magassága egyenlő. Ekkor B_2, B_1, C_1, C_2, az A_1 körül $A_1C_1 = b$ sugárral írt körön vannak, így az $A_2B_2B_1 = C_2B_2B_1$ kerületi szög 30°-os, mert fele a 60°-os $C_2A_1B_1$ középponti szögnek. Másrészt a $B_2A_2B_1$ szög 60°-os, mert váltószögként egyenlő az $A_2B_1C_1$ szöggel; így az $A_2B_2B_1$ háromszög derékszögű, és B_2B_1-re képezett tükörképével szabályos háromszöget alkot, tehát $A_2B_2 = 2A_2B_1 = 2B_1C_1 = 4d$ (ahol $d = B_1C_1/2$). Legyen A_1 és B_2 vetülete a B_1C_1 egyenesen A^*, ill. B_2', így a $C_1B_2B_2'$ derékszögű háromszögben $B_2'C_1 = 5d$, $B_2'B_2 = A^*A_2 = \sqrt{3}d$, tehát $C_1B_2' = b = \sqrt{25d^2 + 3d^2} = 2\sqrt{7}d$. Most már az $A_1B_1A^*$ derékszögű háromszögből a szokásos jelölésekkel $\sin\alpha/2 = \cos\beta = 1/2\sqrt{7}$, és négyjegyű táblázatból $\beta = \gamma \approx 79{,}1°$, $\alpha \approx 21{,}8°$.

Rátkai János (Kisújszállás, Móricz Zs. g. II. o.t.)

Megjegyzések. 1. Az $A_2B_2B_1$ háromszög szögeit más kiindulásból is meghatározhatjuk. A $B_1B_2C_1$ háromszög egybevágó az $A_2A_1C_1$ háromszöggel, mert C_1 körül 60°-os forgatással egymásba vihetők át. Így $B_2B_1C_1\sphericalangle = A_1A_2C_1\sphericalangle = 150°$, és $B_2B_1A_2\sphericalangle = 90°$. Lényegében így állította elő H_1 alakját szerkesztéssel *Katona Mária* (Budapest, Szilágyi E. gyak lg. I. o. t.): a $B_1C_1A_2$ szabályos háromszög révén kitűzte a B_2C_2 egyenest, ennek C_1 körül 60°-kal elforgatott helyzetéből B_1C_1 felező merőlegesével kimetszette A_1-et (az ábrán A_2 B_2 elforgatott helyzetét (A_2), ill. (B_2) jelöli). Szerkesztése számítással folytatható: az elforgatott egyenes a $B_1D = 2A_2(A_2) = 4d$ alapú szabályos háromszög szára, így $A^*D = 3d = 3A^*C_1$ és $A^*A_1 = 3A^*A_2 = 3\sqrt{3}d$, $\mathrm{tg}\beta = 3\sqrt{3}$.

2. Számítással is beláthatjuk, hogy $B_2B_1C_1\sphericalangle = 150°$. Ugyanis az $A_1B_1B_2$ egyenlő szárú háromszögben A_1-nél $60° - \alpha$, ezért B_1-nél $60° + \alpha/2$ szög van, másrészt $C_1B_1A_1\sphericalangle = 90° - \alpha/2$, így összeadással $C_1B_1B_2\sphericalangle = 150°$.

Zalán Péter (Aszód, Petőfi S. g. I. o. t.)

3. A 120°, 30°, 30° szögekkel bíró háromszögben nincs érdekessége annak, hogy a három – azaz két – csúcspont egy egyenesre esik. Ez az „elfajult” és a következő „igazi” megoldás *Lőrincz Pál*nak idevágó tárgyú cikkében[2] is együtt lép fel, közös vonásuk, hogy az $A_2B_2C_2$ háromszög területe 0. – Az igazi megoldás α-ja egyenlő a cikk α_1-ével, mert H_1-ben $m = A_1A^* = \sqrt{28d^2 - d^2} = 3\sqrt{3}d$, ezért a b-re merőleges m_b magassága terület kétféle kifejezése: $t = dm = bm_b/2$ alapján: $m_b = 2dm/b = 3\sqrt{3}d/2\sqrt{7}$ és így $\sin\alpha_1 = m_b/A_1B_1 = m_b/b = 3\sqrt{3}/14$.

II. megoldás: Legyen A_1C_1 felezőpontja B^*, ennek vetülete B_1C_1-en B'; továbbá B_2 vetülete B^*B'-n B'' (a B^*B' szakaszon, mert $B_2B^*B'\sphericalangle = B_2B^*C_1\sphericalangle - B'B^*C_1\sphericalangle = 90° - B'B^*C_1\sphericalangle = B^*C_1B'\sphericalangle$,[3] hegyesszög). Ekkor $A_2A^* = B''B' = B^*B'' - B^*B'$, itt az $A_1A^*C_1$, $B^*B'C_1$ és $B_2B''B^*$ derékszögű háromszögek hasonlósága alapján $B^*B' = A_1A^*/2 = m/2$, másrészt $B^*B'' = C_1A^* \cdot B_2B^*/A_1C_1 = \sqrt{3}d/2$, tehát a fenti egyenletből $\sqrt{3}d = m/2 - \sqrt{3}d/2$, és innen $m/d = \mathrm{tg}\beta = 3\sqrt{3}$, $\beta \approx 79{,}1°$.

Somlai Klára (Makó, József A. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Mindjárt az indulásnál szögfüggvényeket használva $A_2A^* = B_2B_2'$-ből $d\sqrt{3} = b\sin(\beta - 60°)$, és

[1] Lásd az 549. gyakorlat 1. ábráját a novemberi számban 131. o.

[2] Lőrincz Pál: Megjegyzések egy versenyfeladathoz, KML. XVII. kötet, 129-134. o., közelebbről 132 o. (1958. december).

[3] Az ábrán a B^*B'' szakasz pótlandó.

$d/b = \cos\beta$ figyelembevételével $\mathrm{tg}\beta = 3\sqrt{3}$. (Ugyanis B_2 C_2 csak $\beta = \gamma > 60^\circ$ mellett lehetnek B_1C_1-nek az A_2-vel és A_1-gyel egyező partján, tehát $\sin(\beta - 60^\circ) > 0$)

Veres Gyula (Pécs, Zipernovszky K. gépip. t. II. o. t.)

2. Összehasonlítás céljából vázolunk egy nehéz úton járó megoldást is: Az $A_1B_2A_2$ háromszög derékszögű. Vegyük a fenti d-t 1-nek és számítsuk ki b-t. Így $A_1A_2 = \sqrt{b^2-1} - \sqrt{3}$, $A_2B_2 = A^*B_2' = C_1B_2' - 1 = \sqrt{b^2-3} - 1$; a pythagorászi egyenlőségből két, alkalmas rendezés utáni négyzetreemeléssel és $b \neq 0$-ra tekintettel $b^4 - 32b^2 + 112 = 0$, $b_1^2 = 28$ (a fenti megoldás) és $b_2^2 = 4$ (idegen gyök).

Kovács Imre (Budapest, Árpád g. II. o. t.)

3. A II. megoldás módján 60° helyett bármely φ hegyes szöggel megoldhatjuk a feladatot. B'' magassága általában:

$$\frac{m}{2} - \frac{b}{2}\mathrm{tg}\ \varphi \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{m}{2} - \frac{d}{2}\mathrm{tg}\ \varphi,$$

és ezt A_2-nek d tg φ magasságával egyenlővé téve $d/m = 1/3$ tg φ, azaz tg $\alpha/2 =$ ctg $\beta = 1/(3$ tg $\varphi)$, és $\cos\alpha = (1 - \mathrm{tg}^2\alpha/2)/(1 + \mathrm{tg}^2\alpha/2) = (9\ \mathrm{tg}^2\varphi - 1)/(9\ \mathrm{tg}^2\varphi + 1)$. Pl. $\varphi = 45^\circ$ esetén $\cos\alpha = 4/5$, $\alpha \approx 36{,}9^\circ$; $\varphi = 30^\circ$ esetén tg $\varphi = 1/\sqrt{3}$-mal $\cos\alpha = 1/2$, $\alpha = 60^\circ$; $\varphi = 15^\circ$ esetén tg $\varphi = 2 - \sqrt{3}$-mal $\cos\alpha = -(9\sqrt{3} - 10)/26$, $\alpha \approx 102{,}4^\circ$.

Másrészt a $B_2 \equiv C_2$ egybeesés mindig $\alpha = 2\varphi$ esetén áll be, pl. $\varphi = 30^\circ$-kal $\alpha = 60^\circ$ mellett. Ezek szerint $\varphi = 30^\circ$-kal mindkét megoldás szabályos háromszög.

4. Egy-két dolgozat elég pontos rajzról észrevette, hogy B_1, A_2, B^* egy egyenesen vannak, vagy hogy B_1A_2 és C_1B_2 harmadolják egymást. Ez helyes, a fentiek *alapján* könnyen belátható, de hibás az, ha ilyen észrevételeket bizonyítás nélkül egy „megoldás” *alapjává* kívánunk tenni.