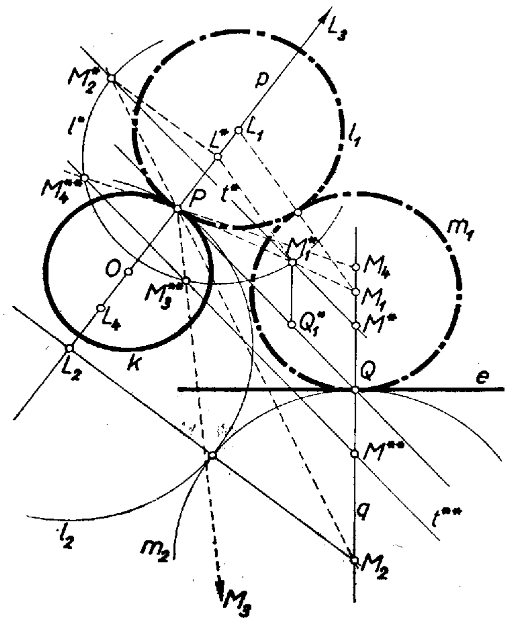
I. megoldás: Tekintsük a feladatot megoldottnak és legyen a keresett l_1, m_1 kör középpontja L_1, M_1 (a P-t k-nak O középpontjával összekötő p egyenesen, ill. az e-re Q-ban emelt q merőlegesen) és közös sugaruk r. A két kör – sugaraik egyenlősége folytán – csak külső érintkezésben lehet egymással, ezért $L_1M_1 = 2r$.



1. ábra

Így a PQM_1L_1 négyszögben ismerjük a PQ oldalt, a P és Q-nál fekvő szögeket és a többi három oldal arányát: $PL_1 : L_1M_1 : M_1Q = 1 : 2 : 1$. A szögek és az arány alapján e négyszöghöz szerkeszthetünk hasonlót, úgy hogy p-re P-től és q-ra Q-tól felmérjük a tetszés szerinti $PL^* = QM^* = d$ szakaszt, az M^*-on át PQ-val húzott t^* párhuzamost elmetsszük az L^* körül $2d$ sugárral írt l^*-körrel, a kapott M_1^* metszésponton át párhuzamost húzunk q-val, és vesszük ennek PQ-val való Q_1^* metszéspontját. Így a $PQ_1^*M_1^*L^*$ négyszög hasonló helyzetű PQM_1L_1-hez, ennélfogva M_1-et q-ból PM_1^*-gyel metszhetjük ki, L_1-et pedig p-ből a $Q_1^*L^*$-gal Q-n át húzott párhuzamossal.

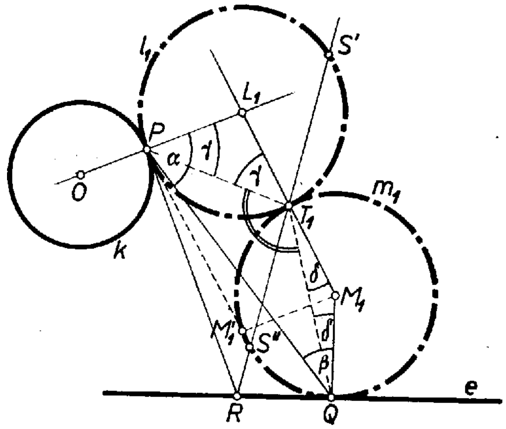
Valóban, a PQM_1 és $PQ_1^*M_1^*$, valamint a PQL_1 és $PQ_1^*L^*$ háromszögpárok hasonlóságából $QM_1 : Q_1^*M_1^* = PQ : PQ_1^* = PL_1 : PL^*$, ezért $Q_1^*M_1^* = QM^* = PL^*$ folytán $QM_1 = PL_1 = r$; másrészt $PM_1 : PM_1^* = QM_1 : Q_1^*M_1^* = r : d = PL_1 : PL^*$, így a PM_1L_1 és $PM_1^*L^*$ háromszögek hasonlók, és $L^*M_1^* = 2d$ folytán $L_1M_1 = 2r$, tehát az L_1, M_1 pontok körül r sugárral írt l_1, m_1 körök érintik egymást, továbbá a P-n, ill. Q-n át p-re, q-ra merőleges egyenest és evvel k-t, ill. e-t.

l^* és t^* kölcsönös helyzete szerint M_1^*-ként $2, 1, 0$ pontot és ugyanennyi megoldást kapunk. PL^* és QM^* egyikének irányát ellentétesre fordítva ugyanezen eljárással ismét legfeljebb 2 megoldás adódik, így a megfelelő körpárok száma általában legfeljebb 4. (Az ábrán $QM^{**} = QM^*$, a megfelelő t^{**}-ből adódó L_4, M_4 középpontok is fel vannak tüntetve.) Könnyen belátható, hogy ha p és q párhuzamosak, akkor a megoldások száma 3. Nincs megoldás, vagy végtelen sok megoldás van, ha P és Q egybeesnek, aszerint, hogy k metszi e-t vagy érinti.

Fekete Béla (Debrecen, Református g. II. o. t.)

Megjegyzés. A szerkesztés *végrehajtásában* Q_1^*-et mellőzhetjük, mert (a bizonyítás szerint) L_1 az $M_1^*L^*$-gal M_1-en át húzott párhuzamossal is kimetszhető, vagy kitűzhető $PL_1 = QM_1$ alapján, figyelembe véve, hogy PL_1 iránya aszerint egyező, ill. ellentétes PL^*-éval, amint PM_1^* és PM_1 irányai megegyeznek, ill. ellentétesek.

II. megoldás: Legyen a k kör P-beli érintőjének e-vel való metszéspontja R, a keresett körök érintkezési pontja (az első körpárra) T_1 és RT_1-nek a körökkel való második metszéspontja S', S''; ekkor a sugarak egyenlősége folytán $T_1S' = T_1S''$.



2. ábra

Az R-ből húzott érintőkre és szelőkre (a 2. ábrán látható helyzetben) $RP^2 = RT_1 \cdot RS' = RT_1(RT_1 + T_1S') = RT_1^2 + RT_1 \cdot T_1S'$, hasonlóan $RQ^2 = RT_1 \cdot RS'' = RT_1(RT_1 - T_1S') = RT_1^2 - RT_1 \cdot T_1S'$. Ezekből $RT_1^2 = (RP^2 + RQ^2)/2$, és ez T_1 számára mértani helyként egy R körüli k_0 kört jelöl ki, melynek sugara egyenlő annak a négyzetnek az oldalával, amelyet az RP, RQ oldalakkal szerkesztett téglalap köré irható körbe írtunk. Így a sugár nagyságra RP és RQ közé esik, P és Q egyike k_0-on belül van, a másika kívül, $RP = RQ$ esetén pedig mindkettő a k_0-on.

Még egy mértani helyet ad PQ-nak T_1-ből vett látószöge. A 2. ábra helyzetében és jelöléseivel egyrészt a PQT_1 háromszögből $PT_1Q\sphericalangle = 180^\circ - T_1PQ\sphericalangle - T_1QP\sphericalangle = 180^\circ - (\alpha - \gamma) - (\beta - \delta) = 180^\circ - (\alpha + \beta) + (\gamma + \delta)$, másrészt $PT_1Q\sphericalangle = L_1T_1M_1\sphericalangle - L_1T_1P\sphericalangle - QT_1M_1\sphericalangle = 180^\circ - (\gamma + \delta)$, és e két kifejezésből $(\gamma + \delta)$ kiküszöbölésével és $(\alpha + \beta)/2 = \varepsilon$ jelöléssel $PT_1Q\sphericalangle = 180^\circ - \varepsilon$. (A különbségek képezésében támaszkodtunk az ábrára, hogy ti. L_1, M_1 a p, ill. q-nak a használt félegyenesén vannak; így T_1 a PQ egyenesnek csak egyik partján lehet, ennek megfelelően PQ-nak két $180^\circ - \varepsilon$ nyílású látószögköríve közül csak az ezen a parton fekvő i_1 veendő figyelembe. Hasonlóan az 1. ábrán vázolt további megoldásokra $PT_2Q\sphericalangle = \varepsilon$, $PT_3Q\sphericalangle = 90^\circ - \varepsilon$, $PT_4Q\sphericalangle = 90^\circ + \varepsilon$.) A két mértani hely metszéspontja adja a keresett körpár T érintkezési pontját (P és Q-nak k_0-hoz képest elfoglalt helyzete folytán i_1 csak egy pontban metszheti k_0-t), a középpontokat pedig TP, TQ felező merőlegese metszi ki p, q-ból.

III. megoldás: Toljuk el M_1-et L_1P irányában és nagyságával; az előálló M_1' az m_1 körön van (2.ábra). Az $M_1M_1'Q$ egyenlő szárú háromszög alakja megszerkeszthető, mert szárainak iránya q és p, így megkapjuk oldalainak $QM_1' : QM_1 = \eta$ arányát és a QM_1' alap irányát. Másrészt $PM_1' = L_1M_1 = 2QM_1$. Ezek szerint M_1'-re $QM_1' : PM_1' = \eta/2$, ezért M_1' rajta van egyrészt a PQ alappontokkal és a szerkeszthető $\eta/2$ aránymutatóval meghatározott Apollóniosz-körön, másrészt a Q-n átmenő, megszerkeszthető irányú QM_1' félegyenesen, tehát megszerkeszthető. Most már sorra megkapjuk m_1-et, r-et és ezekből l_1-et.

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)