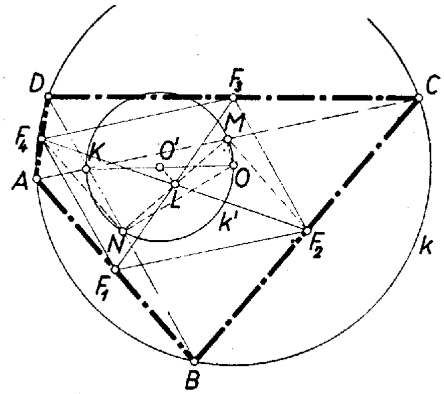
Gondoljuk a feladatot megoldottnak és legyen a keresett négyszög $ABCD$, benne az AC és BD átlók metszéspontja K, és az AB és CD, valamint BC és AD oldalak F_1, F_3, F_2, F_4 felezőpontjait összekötő F_1F_3 és F_2F_4 egyenesek metszéspontja L. Legyen továbbá k középpontja O és az AC, BD átlók felezőpontja M, N.



Ismeretes, hogy az $F_1F_2F_3F_4$ négyszög (bármely $ABCD$ négyszög esetén) paralelogramma, L felezi az F_1F_3, F_2F_4 szakaszokat. Így L az MN szakaszt is felezi, mert M és N mind az F_1, F_3 mind az F_2, F_4 pontpárral ugyancsak egy-egy paralelogrammát határoz meg, ugyanis pl. az F_2M és NF_4 szakaszok, mint az ABC és ABD háromszögekben a közös AB oldallal párhuzamos középvonalak egyirányúan párhuzamosak és egyenlők, így az F_2MF_4N négyszög paralelogramma és L ennek – az F_2F_4 átló révén – középpontja.

Másrészt KM, KN mint az AC, BD húrok egyenesei merőlegesek OM, ill. ON-re, így M és N a KO átmérő fölötti k' Thalész-kör pontjai (akkor is, ha M, N vagy mindkettőjük azonos O-val), eszerint L a k'-ben húrfelező pont.

Ezek alapján a szerkesztés a következő: vesszük az OK átmérőjű k' körnek azt a húrját, amelynek felező pontja L; ennek végpontjait K-val összekötő egyenesek a keresett négyszög átlói.

Valóban, $ABCD$ csúcsai k-n vannak, az átlók metszéspontja K, az L pont felezi az átlók M, N felezőpontjaival meghatározott szakaszt, így rajta fekszik az F_1MF_3N és F_2MF_4N paralelogrammák F_1F_3, ill. F_2F_4 átlóján.

A szerkesztés lépései általában egyértelműek. Ha $K \not\equiv O$ és k' magában foglalja L-et, de L nem azonos k'-nek O' középpontjával, akkor egy megoldás van. Ha $L \equiv O'$, akkor végtelen sok megoldás van, valamennyiben az átlók merőlegesek egymásra. Ha k' átmegy L-en, akkor a négyszög elfajul, mert átlói egybeesnek. Elfajult helyzet áll elő $K \equiv O$ esetén is: k' sugara 0, tehát csak $L \equiv K \equiv 0$-mellett lehet megoldás, ilyenkor bármely a k-ba írt téglalap megoldásnak tekinthető.

Szabó Júlia (Kecskemét, közg. t. III. o. t.)

Megjegyzés. Két dolgozat szerint: „a feladatot az adatok elégtelensége miatt nem lehet megoldani, mert húrnégyszög szerkesztéséhez 4 adat szükséges, itt pedig csak 3 van: k, K, L." Ez téves; az idézett megállapítás méretes (szakasz és szög) adatokra vonatkozik, itt pedig helyzet-adatokból szerkesztettünk; másrészt k két adatnak számít: adott a középpontja és a sugara.