I. megoldás: Osszuk a 8 tagot 4 egymás utáni tag-párba. Minden ilyen pár olyan szorzatként irható, melynek egyik tényezője $x+y$, mert minden ilyen tag-pár második tagja az elsőből egyetlen x tényezőnek y-nal való pótlásával áll elő, többi tényezőik közösek. Így $x+y$ az egész kifejezésnek tényezője:

$$K=x^6(x+y)+x^4y^2(x+y)+x^2y^4(x+y)+y^6(x+y)=(x+y)(x^6+x^4y^2+x^2y^4+y^6).$$

Itt a második többtagú hasonlóan alakítható, x és y helyett x^2 és y^2-nel, és

$$K=(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4). \tag{1}$$

Ezzel a feladatot megoldottnak tekinthetjük.

Rády Erika (Szeged, Rózsa F. g. II. o. t.)

II. megoldás: Ráismerve, hogy K azonos szerkezetű a két egyenlő kitevőjű hatvány különbségének szorzattá való alakításában szereplő „hosszabb” többtagúval, írhatjuk, hogy $K=(x^8-y^8)/(x-y)$, – természetesen feltéve, hogy $x\neq y$. Most a számlálót két négyzet különbségének tekintve, majd ezt az elvet az első tényezőre ismét alkalmazva, végül az osztási lehetőséget kihasználva

$$K=\frac{(x^4-y^4)(x^4+y^4)}{x-y}=\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)}{x-y}=$$
$$=(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4).$$

Gyaraki Károly (Tata, Eötvös J. g. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az I. megoldás első észrevételében kimondott tulajdonság K bármely két szomszédos tagjára fennáll, ezért K egy mértani sor összegének is tekinthető y/x hányadossal. Ebből $x\neq 0$ és $y/x\neq 1$, azaz $y\neq x$ esetén a mértani sor összegképletével is eljutunk a II. megoldás kiindulópontjához.

Horváth Tibor (Szombathely, Nagy Lajos g. II. o. t.)

2. Az 1. megjegyzésben említett megegyezés alapja az, hogy a mértani sor összeg-képlete csupán más alakja a két egyenlő kitevőjű hatvány különbsége szorzat-felbontásának.

3. A fenti felbontáshoz (polinom gyöktényezőire gondolva) Bézout tétele alapján is eljuthatunk (lásd gimn. IV. o. tankönyv).

Gáti Pál (Pécs, Nagy Lajos g. II. o. t.)

4. Az (1) alak tetszetős szimmetriájának megbontásával az x^4+y^4 tényező tovább bontható:

$$x^4+y^4=\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2=(x^2+y^2-\sqrt{2}xy)(x^2+y^2+\sqrt{2}xy),$$

a kapott két tényező azonban, valamint az x^2+y^2 tényező is, valós számokban tovább nem bontható, mert bennük x-et ismeretlennek, y-t állandónak, és a tényezőket egy-egy 0-ra redukált másodfokú egyenlet bal oldalának tekintve ezen egyenletek diszkriminánsa negatív: $-2y^2$, ill. $-2y^2$, ill. $-4y^2$, vagyis az $x^2-\sqrt{2}yx+y^2=0$, $x^2+\sqrt{2}yx+y^2=0$, $x^2+y^2=0$ egyenleteknek nincs valós gyökük.

Fritz József (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. II. o. t.)

5. Az I. megoldás párokba foglalási eljárása azért volt folytatható addig, míg az utolsó tényező is kéttagú lett, mert K $8=2^3$ tagból áll. Teljes indukcióval meg lehet mutatni, hogy a 7-es kitevő helyén 2^k-1-gyel

$$x^{2^k-1}+x^{2^k-2}y+x^{2^k-3}y^2+\ldots+y^{2^k-1}=(x+y)(x^2+y^2)(x^{2^2}+$$
$$+y^{2^2})\ldots(x^{2^{k-1}}+y^{2^{k-1}})$$ [1]

Kéry Gerzson (Sopron, Széchenyi I. g. I. o. t.)

[1] $y=1$-gyel az 1941. évi Eötvös-verseny 1. feladata.