I. megoldás: *a)* A körülírt kör K középpontja megszerkeszthető egy szög felhasználásával. Ha az ABC háromszög valamelyik szöge, pl. $ACB\sphericalangle = \gamma$ derékszög, akkor K azonos a szembenfekvő AB oldal C_0 felezőpontjával, és megszerkeszthető úgy, hogy AB-re mint átlóra tetszés szerinti egyenlőtlen oldalú paralelogrammát szerkesztünk és a másik átlóval metsszük AB-t. Ha γ hegyesszög, akkor az AB oldal látószöge K-ból 2γ, K ugyanazon oldalán van AB-nek, mint C és az ABK háromszög egyenlő szárú, ennélfogva $KAB\sphericalangle = KBA\sphericalangle = (180^\circ - 2\gamma)/2 = 90^\circ - \gamma$; ezek alapján K megszerkeszthető. Ha γ tompaszög akkor AB látószöge K-ból $360^\circ - 2\gamma$, így $KAB\sphericalangle = KBA\sphericalangle = \gamma - 90^\circ$ és K az AB-nek a C-vel ellentétes oldalán szerkesztendő.

b) A beírt k kör O, és az $AB = c$ oldalhoz hozzáírt k_c kör O_c középpontja az oldalak felhasználásával abból szerkeszthető, hogy k a CA, CB oldalakat C-től A, ill. B felé $s - c = (a + b - c)/2$ távolságban érinti, k_c pedig meghosszabbításukat A-n, ill. B-n túl C-től $s = (b + c + a)/2$ távolságban. A két-két érintési pontban a megfelelő oldalra állított merőlegesek metszéspontja O, ill. O_c. Hasonlóan szerkeszthető O_a és O_b.

c) Az S súlypont céljára pl. az s_c súlyvonal C_0 pontját bármely háromszögben úgy kaphatjuk, mint *a)*-ban derékszögű háromszög esetére. Ugyanígy szerkesztve s_b-t, ez s_c-ből kimetszi S-et.

Egyed Julianna (Gyöngyös, Vak Bottyán g. I. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az *a)* rész szerkesztése hegyes- és tompaszög esetére egyszerre is kimondható: AB-re A-ban és B-ben a C-t tartalmazó félsíkban a^*, b^* merőleges félegyeneseket állítunk, ezektől mérjük fel γ-t arra az oldalra, amelyiken az AB szakasz fekszik.

2. Megeshetik, hogy olyan egyenest is használtunk, amely egyben valamelyik oldalnak, szögnek felezője. Ha ezt még más szerepben, a szokásostól eltérő szerkesztéssel sem engedjük meg, akkor meg kell vizsgálnunk, hogy burkoltan nem használtunk-e fel oldalfelezőt, szögfelezőt. Az *a)* rész AK, BK egyenese oldal- és egyben szögfelezővé válik, ha az A-ból, B-ből induló oldalak egyenlők. Eszerint egyenlő oldalú háromszögben az adott eljárás nem megengedett, egyenlő szárú háromszögben pedig csak $AB \neq BC = CA$ esetén használható. – A *b)* részben a k érintési pontjában állított merőleges sem használható, ha az érintési pont felezi a kérdéses oldalt. Az adott eljárással O – és hasonlóan S is – szintén csak $AB \neq BC = CA$ esetén szerkeszthető.

3. Egyenlő oldalú háromszög $K \equiv O \equiv S$ pontját pl. úgy kaphatjuk, ha az AB, BC, CA oldal B-n, C-n, A-n túli meghosszabbításain úgy vesszük C_1, A_1, B_1-et, hogy $C_1B = A_1C = B_1A = AB$, és megszerkesztjük az ugyancsak egyenlő oldalú $A_1B_1C_1$ háromszög középpontját.

II. megoldás: *a)* A háromszög területének két ismert képletéből $t = cm_c/2 = abc/4r$, és innen $KA = r = ab/2m_c$, ami negyedik arányosként megszerkeszthető, és a csúcsok körül r sugárral írt körök közös pontja K (mind a 3 kör szükséges).

b) Hasonlóan $2t = cm_c = 2\varrho s = 2\varrho_c(s - c)$-ből $\varrho = cm_c/2s$, $\varrho_c = cm_c/2(s - c)$, így a CA, CB egyenesektől ϱ, ill. ϱ_c, távolságban B, ill. A-val egyező partjukon húzott párhuzamosok metszéspontja O, ill. O_c.

c) Hasonlóan S-et megadja két oldallal a megfelelő magasság harmadoló pontján át húzott párhuzamos metszéspontja.

Fábián Gábor (Győr, Bencés g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Két oldal megegyezése esetén a közös csúcsukból induló magassága fenti célra ismét nem használható, ha pedig mind a három oldal egyenlő, akkor ez a megoldás is használhatatlan.

2. Ha az oldalak különbözők, akkor K szerkesztésére felhasználhatjuk, hogy az M magasságpontnak az oldalakra való tükörképei a körülírt körön vannak. Ilyenkor mindhárom magasság és mindhárom tükörkép megszerkeszthető, az utóbbiakon átmenő kör középpontja K.

Popper Gábor (Budapest, Bolyai J. g. I. o. t.)

3. A csúcsokból a talpponti háromszög oldalaira bocsátott merőlegesek a körülírt körből átmérőt metszenek ki; K ennek alapján is szerkeszthető.

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)