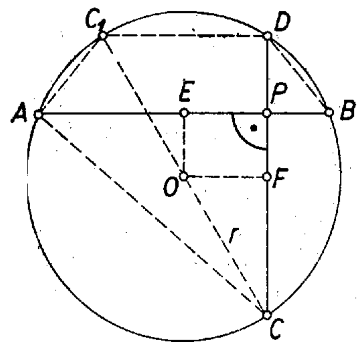
I. megoldás: Legyenek az r sugarú, O középpontú kör P belső pontján átmenő, egymásra merőleges húrok AB és CD.



A szeletek S négyzetösszege alkalmas zárójelbefoglalással $S = (AP^2 + CP^2) + (BP^2 + DP^2) = AC^2 + BD^2$. Megmutatjuk, hogy a C-hez tartozó átmérő másik végpontját C_1-gyel jelölve $AC_1 = BD$, így az ACC_1 derékszögű háromszögre Pythagorász tételét alkalmazva $S = AC^2 + AC_1^2 = CC_1^2 = 4r^2$, állandó.

Valóban, a feltevés, valamint Thalész tétele folytán AB és DC_1 merőlegesek CD-re, így DC_1 párhuzamos AB-vel. Eszerint A, B, D és C_1 egy körbeírt, tehát szimmetrikus trapéz csúcsai, és ebben a kérdéses AC_1 és BD vagy a két szár, vagy a két átló szerepét játsszák, mindenképpen egyenlők. – Ha P felezi AB-t, akkor CD az AB-re merőleges átmérő, $C_1 \equiv D$ és $AC_1 = AD = BD$ azért teljesül, mert az ABD háromszög egyenlő szárú.

A tétel más fogalmazása pl. az, ha kimondjuk a kérdéses összeg értékét: a szeletek négyzetösszege egyenlő az átmérő négyzetével. Vagy, a használt átalakításra tekintettel, – amely helyett $S = AD^2 + BC^2$-et is írhattunk volna –: merőleges átlójú, húrnégyszög két-két szemközti oldalának négyzetösszegei egyenlők a körülírt kör átmérőjének négyzetével.

Sebestyén Zoltán (Celldömölk, Berzsenyi D. g. I. o. t.)

Megjegyzés. Nem használtuk ki, hogy P a körön belül van, ezért az állítás minden olyan külső P pontra is érvényes, amelyen át lehet k-t metsző merőleges szelőpárt fektetni, vagyis amelyből k a derékszögnél nagyobb szögben látható, másképpen, amely közelebb van O-hoz, mint a k-ba írható négyzet oldala.

II. megoldás: Legyen O-nak AB-n, ill. CD-n levő vetülete, vagyis e húrok felezőpontja E, F. Feltehetjük (alkalmas betűzéssel elérhetjük), hogy P a DF szakaszon, esetleg F-ben van. Így $OE = FP = CP - CF = CP - (CP + DP)/2 = (CP - DP)/2$, másrészt $AE = (AP + BP)/2$, és ezekkel az OAE háromszögből Pythagorász tételével

$$AE^2 + OE^2 = r^2, \qquad (AP + BP)^2 + (CP - DP)^2 = 4r^2,$$
$$(AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2) + 2(AP \cdot BP - CP \cdot DP) = 4r^2.$$

Itt a második zárójelbeli különbség tagjai az egymást metsző húrok szakaszaira ismert tétel szerint egyenlők, a különbség 0, és így a kérdéses négyzetösszeg $4r^2$-tel egyenlő, függetlenül P helyzetétől, amit bizonyítanunk kellett.

Kóta József (Tatabánya, Árpád g. I. o. t.)

Megjegyzés. Az utóbbi megoldásnak kissé más alakja az, ha r, OE, OF-fel kifejezzük a két húr felét és a szeleteket, és így képezzük S-et; összevonások után $4r^2$-et kapunk.

Kéki Zsuzsanna (Mezőtúr, Teleki Blanka lg. II. o. t.)