a) Az egyenletben x nem lehet negatív, mert akkor $\sqrt{x}$ nem valós, – és 0 sem lehet, mert akkor a kitevőkben 0^0 állna, márpedig a 0 kitevős hatvány csak 0-tól különböző alapokra van értelmezve. Ezek szerint $x>0$. – Másrészt látjuk, hogy $x=1$ megoldása az egyenletnek (mindkét oldal értéke 1), ezért a további esetleges gyökök keresésében feltehetjük, hogy $x\neq 1$. – A két oldali alapok egyezése folytán a hatványok csak úgy lehetnek egyenlők, ha a kitevők egyenlők: $x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}^x$. A nem negatív x-ekre érvényes $x=(\sqrt{x})^2$ azonosság alapján a bal oldalt átalakítva: $\sqrt{x}^{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}^x$. Mivel $\sqrt{x}\neq 1$, azért a fenti gondolatot újra alkalmazva $2\sqrt{x}=x$. Innen $4x=x^2$ és az egyenletet $x=4$-en kívül más pozitív szám nem elégítheti ki. Ezzel a bal oldali kitevő $4^{\sqrt{4}}=16$, a jobb oldali: $2^4=16$, tehát $x=4$ is gyök (mindkét oldal értéke 4 294 967 296).

b) Az egyenletrendszer második egyenletének (amelyben nyilván $b>0$ és $b\neq 1$) csak akkor van értelme, ha x, y pozitívok; innen $y=x^m$. Az y kiküszöbölésével $x^m=mx$, $x^{m-1}=m$, végül

$$x=\sqrt[m-1]{m}=m^{\frac{1}{m-1}},\qquad y=m\sqrt[m-1]{m}=m^{\frac{m}{m-1}}. \tag{1}$$

Az itt kijelölt gyökvonásnak nincs értelme, ha $m-1=0$, azaz $m=1$. Mégsem mondjuk, hogy nincs megoldás, mert ekkor mindkét egyenlet szerint $y=x$, ezt minden egyenlő pozitív számokból álló számpár kielégíti. *Egyértelmű* megoldás valóban nincs. – Nincs értelme (1)-nek $m=0$ esetén sem, mert 0^{-1} nincs értelmezve (0-nak csak pozitív kitevős hatványai vannak értelmezve). Végül $x>0$, $y>0$-ból és az első egyenletből $m=y/x$ folytán $m<0$ mellett sincs megoldás. – Mindezek szerint (1) akkor megoldása az adott egyenletrendszernek, ha b és m az 1-től különböző pozitív számok.

Fritz József (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az a) egyenlet $x=1$ gyökét „számító” úton a két oldal logaritmusának egyenlőségéből kaphatjuk: $x^{\sqrt{x}}\lg x=\sqrt{x}^x\lg x$-ből $(x^{\sqrt{x}}-\sqrt{x}^x)\lg x=0$ teljesül, ha $\lg x=0$, azaz $x=1$.

2. Célszerű a megoldást néhány numerikus m mellett is ellenőrizni; legyen mindvégig $b=10$. Pl. $m=2$-vel: $x=2$, $y=4$; $m=3$-mal: $x=\sqrt{3}$, $y=3\sqrt{3}$; $m=10$ esetén $x=\sqrt[9]{10}=1{,}292$, $y=12{,}92$; $m=1/2$ mellett $m-1=-1/2$, $1/(m-1)=-2$, $x=(1/2)^{-2}=2^2=4$, $y=2$, vagyis $m=2$-hez képest x és y felcserélődtek, ami az első egyenlet alapján „szinte várható”. Ugyanezt találjuk $m=1/3$, $m=1/10$ esetén is. m helyett $1/\mu$-vel $1/(m-1)$ helyére $\mu/(1-\mu)$ lép és $m/(m-1)$ helyére $1/(1-\mu)$ tehát

$$x=\left(\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{\mu}{1-\mu}}=\mu^{\frac{\mu}{\mu-1}},\qquad y=\left(\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{1-\mu}}=\mu^{\frac{1}{\mu-1}},$$

ami észrevételünk általános érvényességét mutatja. Így vezethetnek a (sokak által elhanyagolt, sőt „megvetett”) számpéldák általános érvényességű tételek megsejtésére, ha merünk nem-egész számokkal is próbát tenni. Természetesen a másik irányban torzítanánk, ha csak egyes számpéldák alapján mondanánk ki általános megállapításokat.