Az ismeretlenek egyike sem 0 (különben legalább az egyik egyenlet bal oldala 0 volna), továbbá egyenlő jelűek, különben $\sqrt{xy}$-nak nem volna értelme; tegyük fel egyelőre, hogy mindkettő pozitív. Ekkor $\sqrt{xy}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}$ és egyenleteink így alakíthatók:

$$x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}})=105, \qquad y^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}})=70.$$

Az előzők szerint a zárójeles kifejezés pozitív; azt kiküszöbölve (röviden: a két egyenlet osztásával), $x^{\frac{l}{2}}:y^{\frac{1}{2}}=105:70=3:2$, tehát $y^{\frac{1}{2}}=2x^{\frac{1}{2}}/3$, $y^{\frac{3}{2}}=8x^{\frac{3}{2}}/27$, és evvel az első egyenletből $35x^2/27=105$, $x^2=81$, $x=9$, végül $y=4$. Ez az értékpár mindkét egyenletet kielégíti.

Más gyök nem is lehetséges, mert az x, $y<0$ feltevés akár $x=y$; akár $x<y$, akár $x>y$-nal lehetetlenségre vezet. Valóban, ha x és y negatívok és $x=y$, akkor $\sqrt{xy}=\sqrt{x^2}=|x|=-x=-y$, és mindkét egyenlet bal oldala 0. Ha $x<y<0$, akkor a $\sqrt{xy}$ pozitív szám nagyobb $a-y$ pozitív számnál: $\sqrt{xy}>-y$, innen a negatív x-szel szorozva $x\sqrt{xy}<-xy$, tehát a második egyenlet bal oldala negatív: $y^2+x\sqrt{xy}<y^2-xy=y(y-x)<0$, mert az utolsó alakban $y<0$ és $y-x>0$. Végül $y<x<0$ mellett hasonlóan az első egyenlet bal oldala negatív, ugyanis $y<x$, $xy>x^2$, $\sqrt{xy}>-x$, $y\sqrt{xy}<-xy$ és $x^2+y\sqrt{xy}<x^2-xy=x(x-y)<0$, mert $x<0$ és $x-y<0$.

Hanyi Zsolt (Szombathely, Nagy Lajos g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Ezúttal is több olyan versenyző volt, aki önkényesen feltette, hogy az egyenletrendszer gyökei egész számok, és ennek alapján próbálgatásszerűen *megkereste* azokat. Ilyen dolgozat nem fogadható el, mert ez az eljárás nem biztosít arról, hogy nincs más, nem egész megoldás.

2. Sokan $x^2=81$ alapján $x=\pm 9$-et, $y=\pm 4$-et adták meg megoldásnak, és a négyzetgyökös egyenletnél elengedhetetlen próbát mellőzve nem zárták ki az $x=-9$, $y=-4$ értékpárt, ezért hiányos a dolgozatuk. A fenti megoldásban az $x>0$ feltevés alapján jutottunk $x^2=81$-re, ezért $x\neq -9$.