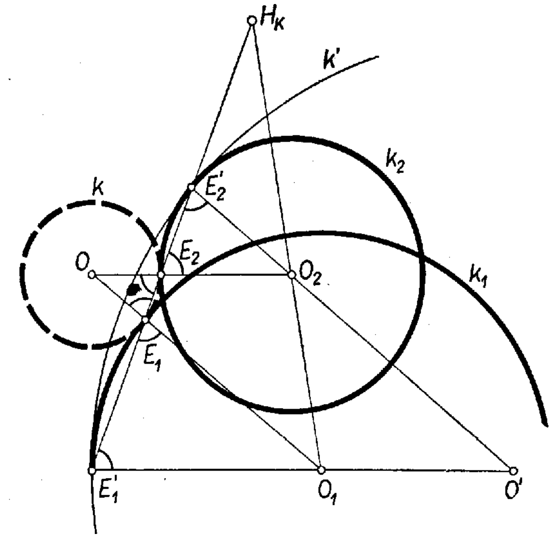
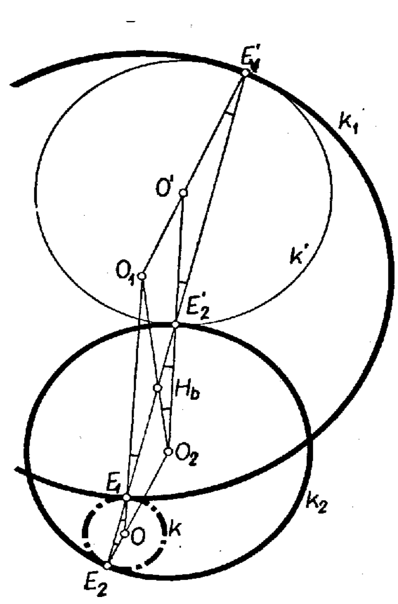
I. megoldás: Tekintsük elsőnek a külső érintkezések esetét. Legyen a k_1, k_2, k körök középpontja rendre O_1, O_2, O, az első kettő sugara r_1, r_2, és válasszuk az indexezést úgy, hogy $r_1 > r_2$; legyen az E_1E_2 egyenesnek k_1, k_2-vel való második metszéspontja E_1', E_2', és O_1O_2-vel való metszéspontja H_k. Erről a H_k-ról mutatjuk meg, hogy E_1E_2-nek minden más helyzetén is rajta fekszik.



1. ábra

Az érintések folytán az O_1, E_1, O és O_2, E_2, O ponthármasok egy egyenesbe esnek (1. ábra), E_1, E_2 elválasztják a középpontokat, ezért O_1, O_2 az E_1E_2-nek ugyanazon partján fekszik, tehát H_k az O_1O_2 szakaszon kívül van. Az $O_1E_1E_1'$, OE_1E_2 és $O_2E_2'E_2$ egyenlő szárú háromszögekből $O_1E_1'E_1\sphericalangle = O_1E_1E_1'\sphericalangle = OE_1E_2\sphericalangle = OE_2E_1\sphericalangle = O_2E_2E_2'\sphericalangle$, és mivel $E_1'E_1$ és E_2E_2' irányítása egyező, azért $O_1E_1' \parallel O_2E_2$, és az $O_1E_1'H_k$, $O_2E_2H_k$ háromszögek hasonlók. Ebből $H_kO_1 : H_kO_2 = E_1'O_1 : E_2O_2 = r_1 : r_2 > 1$, tehát $H_kO_1 > H_kO_2$, vagyis H_k az $O_1O_2 = d$ szakasznak O_2-n túli meghosszabbításán fekszik, továbbá $(H_kO_1 - H_kO_2) : H_kO_2 = d : H_kO_2 = (r_1 - r_2) : r_2$ alapján H_k-nak O_2-től való távolsága $H_kO_2 = dr_2/(r_1 - r_2)$, és ez valóban független k-tól. Másrészt O_1E_1' és O_2E_2 irányítása is egyező, tehát $E_1'E_2$ a k_1, k_2 körök egy-egy párhuzamos és egyirányú sugarának végpontjait összekötő egyenes, H_k pedig ennek a körök centrálisával való metszéspontja, vagyis a két kör külső hasonlósági pontja.

Ugyanígy bizonyítjuk az állítást, ha a változó kör k_1 és k_2 mindegyikével belső érintkezésben van (1. ábra k' köre, ennek – hogy ábránk ne váljék zsúfolttá, azt választottuk, amelynek érintési pontjai éppen E_1', E_2'; a bizonyítás megfordításából kiderül, hogy ilyen kör van). A meggondolás bevezető része így módosul: O_1 ugyanazon oldalán van E_1'-nek, mint O', ugyanígy áll O_2 is E_2'-höz képest, ezért O_1, O_2 ismét ugyanazon oldalán van $E_1'E_2'$ nek, ismét az O_1O_2 szakaszon kívül fekvő H_k-ra jutunk. (Az ábrán k_1 és k_2, valamint az r' sugarú k' belső érintkezése olyan, hogy k' magába foglalja az adott köröket: $r' > r_1 > r_2$; meggondolásunk azonban $r_2 < r' < r_1$ és $r' < r_2$ esetén is érvényes.)



2. ábra

Hasonlóan bizonyítható a vegyesen külső és belső érintkezések esete is (a 2. ábra ismét két ilyet mutat; ezekben is az E és E' pontok szerepe felcserélődik, a k kör k_1-et kívülről, k_2-t belülről érinti és benne van k_2-ben, k' pedig benne van k_1-ben és kívülről érinti k_2-t). A bizonyítás annyiban módosul, hogy H_k megfelelője: H_b az O_1O_2 szakaszon van, ugyanis O az E_1-nek ellentétes oldalán van mint O_1, és E_2-nek ugyanazon oldalán, mint O_2, ezért O_1 és O_2 az E_1E_2-nek ellentétes oldalán feküsznek, másrészt hogy a hasonló háromszögek H_b-nél fekvő szögei csúcsszögek; végül $H_bO_2 = dr_2/(r_1 + r_2)$, ami ismét állandó. H_b a két kör belső hasonlósági pontja.

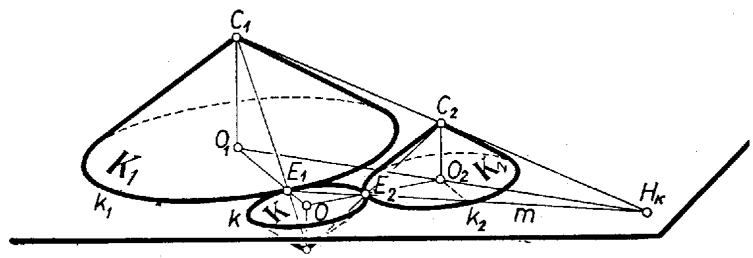
Ha az E_1', E_2' „második" metszéspontok egybeesnek E_1, ill. E_2-vel, akkor a szereplő egyenlő szárú háromszögek elfajulnak, mert az alapjukon fekvő szögek 90°-osak lennének, ilyenkor k is elfajul k_1 és k_2-nek valamelyik közös érintőjébe. Akkor is szakasszá fajulnak a szereplő egyenlő szárú háromszögek, sőt a két hasonló háromszög is, ha O rajta van az O_1O_2 egyenesen; ilyenkor E_1, E_2 is az O_1O_2-n van, tehát $E_1E_2 \equiv O_1O_2$, átmegy H_k-n és H_b-n. Ha O_2 egybeesik O_1-gyel, akkor $H_k \equiv H_b \equiv O_1$.

Ha már most $r_1 = r_2$, akkor kiindulási ábránk O_1O_2-re és felező merőlegesére tükrös, a „külső-külső" és „belső-belső" esetekben H_k nem létezik, E_1E_2 párhuzamos O_1O_2-vel; a többi esetek H_b pontja ilyenkor az O_1O_2 felezőpontjába esik. Ezek az O_2H_k, ill. O_2H_b képletből is kiolvashatók, az előbbi $r_1 - r_2 = 0$ miatt értelmetlenné válik.

Összefoglalva: az E_1E_2 egyenes a k_1, k_2 körök külső, ill. belső hasonlósági pontján megy át aszerint, hogy k-nak a k_1 és k_2-vel való érintkezése megegyező, ill. ellentétes értelmű.

Knuth Előd (Budapest, I. István g. II. o. t.)

II. megoldás: Az állítást ábránknak térbeli értelmezést adva bizonyítjuk be. Állítsunk k_1, k_2, k-ra egyenlő nyílásszögű (más szóval hasonló) K_1, K_2, K forgáskúpokat, legyenek ezek csúcsai C_1, C_2, C.



A kúpok csúcsát ábránk S síkjának alkalmas oldalára téve elérhetjük, hogy K egy-egy alkotója egybeesik K_1, ill. K_2 egy alkotójával, és a kúpok a közös alkotó mentén érintik is egymást. Éspedig ha két körünk között külső érintkezést kívánunk, akkor kúpjaik csúcsát S két ellentétes oldalára tesszük (ilyenkor az alkotó*szakaszok*hoz hozzágondoljuk S-en túl való folytatásukat, az alkotók tehát a csúcsból kiinduló *félegyenesek*), belső érintkezésük esetén pedig S-nek ugyanazon oldalára kerülnek a csúcsok (ilyenkor elég alkotó*szakasz*ra gondolni). Elsőnek pl. K és K_1-et helyezzük el, majd K_2-t a K-hoz viszonyítva. Így eredeti ábránk körei a kúpoknak S-sel való metszésvonalai, mindegyik középpont a megfelelő C-nek S-en való vetülete, az OO_1 és OO_2 egyenesek a közös alkotók vetületei, E_1 és E_2 pedig a közös alkotóknak S-en való döfépontjai. Most már láthatjuk, hogy ezen alkotók egybeesését (a csúcsok elhelyezésén felül) egyrészt az biztosítja, hogy minden alkotó ugyanakkora szöggel hajlik S-hez, másrészt az, hogy benne vannak az OO_1-en, OO_2-n át S-re merőlegesen álló síkban.

Most már a vizsgálandó E_1E_2 egyenes a közös alkotók T síkjának (másképpen: a C_1, C_2, C csúcsokkal meghatározott síknak) S-sel való m metszésvonala. T-ben benne fekszik a C_1C_2 egyenes is, ezért ennek S-sel való H döféspontja m-en fekszik. Ha k és vele E_1E_2 a követelményeknek megfelelően változik, akkor T a C_1C_2 egyenes körül elfordulva más-más helyzetet vesz fel, de állandóan átmegy H-n, és így ugyanez áll m-re is. – Amíg k_1 és k_2 sugarai különbözők, addig C_1 és C_2 S-től különböző távolságban vannak, ezért H biztosan létezik. Ha a sugarak egyenlők, és K_1 és K_2 S-nek ugyanazon oldalára kerültek (a „belső-belső" és a „külső-külső" eset), és ezért C_1C_2 párhuzamos S-sel, ebben az esetben – és csak ebben – H nem létezik, az E_1E_2 egyenesek párhuzamosak C_1C_2-vel és így egymással.

Faludi Irén (Budapest, Ságvári E. gyak. lg. II. o. t.)