I. megoldás: A kívánt egyenlőséget megmutathatjuk az SS_1 szorzat tagról tagra való kiszámításával. A tagok száma $(2n+1)^2$, mindegyikük $\pm q^k$ alakú,[1] ahol $0 \leq k \leq 4n$. Ha $0 \leq k \leq 2n$, akkor $\pm q^k$-t akkor kapunk, ha S-ből $q^k - t, q^{k-1}$-et, $\ldots$, q-t, 1-et szorozzuk S_1-ből rendre 1-gyel, $-q$-val, $\ldots$, $\pm q^{k-1}$-nel, $\pm q^k$-val, az ilyen tagok száma $k+1$. Az első szorzat előjele plusz, a továbbiaké váltakozva mínusz, ill. plusz; eszerint összegük páros számú tag, vagyis páratlan k esetén 0, páros k esetén q^k. Viszont $2n \leq k \leq 4n$, vagyis $0 < k - 2n \leq 2n$ esetén akkor kapunk $\pm q^k$-t, ha S-ből a $q^{k-2n}, q^{k-2n+1}, \ldots, q^{2n-1}, q^{2n}$ tagot szorozzuk S_1-ből rendre a $q^{2n}, -q^{2n-1}, \ldots, \pm q^{k-2n+1}, \pm q^{k-2n}$ taggal. Az előjelekre és az összegekre ugyanaz áll, amit a 0 és $2n$ közti k kitevők esetére megállapítottunk. Ezek szerint az SS_1 szorzat q-nak minden páros kitevőjű hatványát $+1$ együtthatóval tartalmazza 0-tól $4n$-ig, páratlan kitevőjű hatványait pedig nem tartalmazza, tehát egyenlő a bizonyítandó egyenlőség bal oldalán álló kifejezéssel.

Kóta Gábor (Tatabánya, Árpád g. II. o. t.)

II. megoldás: Legyen $1 + q^2 + q^4 + \ldots + q^{2n} = S'$ és $1 + q^2 + q^4 + \ldots + q^{2n-2} = S''$. Ekkor egyrészt $S' = S'' + q^{2n}$, másrészt $S = S' + qS''$, $S_1 = S' - qS''$ és így

$$SS_1 = S'^2 - q^2 S''^2 = (1 - q^2)S''^2 + 2q^{2n}S'' + q^{4n}.$$

Már most, mint beszorzással belátható, $(1 - q^2)S'' = 1 - q^{2n}$, ennélfogva

$$SS_1 = (1 - q^{2n})S'' + 2q^{2n}S'' + q^{4n} = S'' + q^{2n}S'' + q^{4n}.$$

Az utolsó alakban q-nak csupa páros kitevőjű hatványai állnak, S''-ben $q^0 = 1$-től q^{2n-2}-ig (n tag) q^{2n} S''-ben q^{2n}-től q^{4n-2}-ig (n tag) és q^{4n} (összesen $2n+1$ tag) éppen mint a bizonyítandó egyenlőség bal oldalán.

III. megoldás: A bizonyítást a teljes indukció módszerével is végezhetjük. Az állítás $n = 0$ és $n = 1$ esetén igaz, mert $1 \cdot 1 = 1$ és $(1 + q + q^2)(1 - q + q^2) = 1 + q^2 + q^4$. Feltéve, hogy valamely $n = k$ értékre igaz, megmutatjuk, hogy a következő $n = k + 1$ értékre is helyes. Így S, S_1 helyére $S' = S + q^{2k+1} + q^{2k+2}$, $S_1' = S_1 - q^{2k+1} + q^{2k+2}$ lép, így

$$S'S_1' = SS_1 + q^{2k+1}(S_1 - S) + q^{2k+2}(S + S_1) - q^{4k+2} + q^{4k+4}.$$

Itt

$$\begin{aligned}
& q^{2k+1}(S_1 - S) = -2q^{2k+1}(q + q^3 + \ldots + q^{2k-1}) = \\
\text{(k tag)} \qquad & = -2q^{2k+2} - 2q^{2k+4} \ldots - 2q^{4k}, \\
& q^{2k+2}(S + S_1) = 2q^{2k+2}(1 + q^2 + \ldots + q^{2k}) = \\
\text{(k + 1 tag)} \qquad & = 2q^{2k+2} + 2q^{2k+4} + \ldots + 2q^{4k+2},
\end{aligned}$$

tehát SS_1-nek a feltevés szerinti kifejezését beírva

$$S'S_1' = SS_1 + 2q^{4k+2} - q^{4k+2} + q^{4k+4} = 1 + q^2 + q^4 + \ldots + q^{4k+2} + q^{4k+4},$$

ez pedig valóban a bizonyítandó egyenlőség bal oldala $n = k + 1$-re.

Gajári Gyula (Budapest, Eötvös J. g. I. o. t.)

Megjegyzés. Számos dolgozat az $(a^k - b^k) : (a - b)$ és az $(a^{2k+1} - b^{2k+1}) : (a + b)$ hányados polinomalakjának felhasználásával bizonyította az állítást. Ezeket is elfogadtuk, bár a használt azonosságok lényegében a mértani sor összegképletét adják: a (szokásosan rendezett) polinomalaknak minden az első utáni tagja az előtte állóból b/a-val, ill. $-b/a$-val való szorzással áll elő; $a = 1$-gyel (és $b = q$-val) pedig az első azonosság az összegképlet szokásos alakjába megy át.

---

[1] *Vagy* plusz, *vagy* mínusz jellel q^k (nem pedig *egyszer* plusz és *egyszer* mínusz jellel).