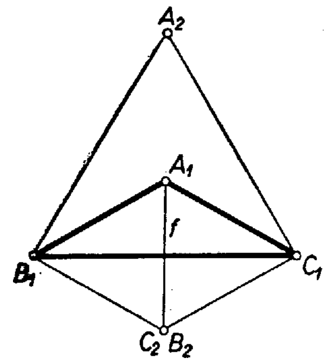
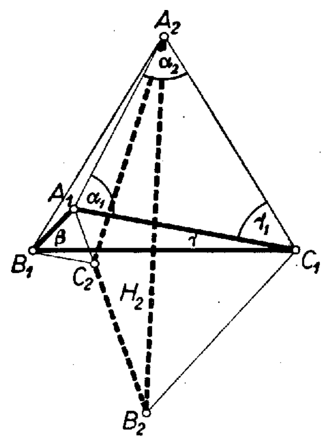
Legyenek az $A_1B_1C_1 = \mathbf{H}_1$ háromszög szögei rendre α, β, γ, és legyen $\alpha \geq 120^\circ$, továbbá $\beta \geq \gamma$. A bizonyítást a következő esetek vizsgálatára bontjuk fel: 1) $\alpha = 120^\circ$, $\beta = \gamma (= 30^\circ)$; 2) $\alpha = 120^\circ$, $\beta > \gamma$; 3) $\alpha > 120^\circ$, $\beta \geq \gamma$.



1. ábra

Az 1) és 2) esetekben a $B_2A_1C_1\sphericalangle = C_2A_1B_1\sphericalangle = 60^\circ$-os szögek B_2A_1, C_2A_1 szára egybeesik a $B_1A_1C_1$ szög f (belső) szögfelezőjével, és így egymással is. Az 1) esetben $\mathbf{H}_1$ egyenlő szárú, így $B_2A_1 = C_1A_1 = B_1A_1 = C_2A_1$, így B_2 egybeesik C_2-vel, ami megfelel a bizonyítandó állításnak.

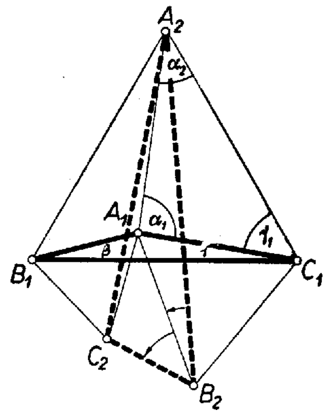
A továbbiakban feltesszük, hogy $\mathbf{H}_1$ betűzése pozitív körüljárású, vagyis pl. az A_1B_1 félegyenest A_1 körül A_1C_1-be az óramutató járásával ellentétes irányú, 180°-nál kisebb forgás viszi át. – A 2) esetben $A_1C_1 > A_1B_1$, így f-en a pontok sorrendje: A_1, C_2, B_2 (2. ábra).



2. ábra

Elegendő megmutatnunk, hogy A_2 ugyanazon partján fekszik f-nek, mint C_1. Ekkor ugyanis az $A_2B_2C_2 = \mathbf{H}_2$ háromszög körüljárása megegyezik a $C_1B_2C_2$ háromszögével, ez ismét egyezik $C_1B_2A_1$-ével, ez pedig $C_1B_1A_1$-ével, vagyis az A_1, C_1, B_1 körüljárással, $\mathbf{H}_1$ ellentétes irányú körüljárásával, ami megfelel az állításnak. – A_1 a $B_1C_1A_2$ háromszög belsejében van, mert B_1C_1-nek ugyanazon partján fekszik, mint A_2 és $C_1B_1A_1\sphericalangle = \beta < 60^\circ = C_1B_1A_2\sphericalangle$, és $A_1C_1B_1\sphericalangle = \gamma < 60^\circ = A_2C_1B_1\sphericalangle$. Közelebbről $A_1B_1 < A_1C_1$ folytán B_1C_1 felező merőlegesének, vagyis a $B_1A_2C_1$ szög felezőjének C_1-gyel ellentétes partján van A_1, ezért az $A_1A_2C_1\sphericalangle = \alpha_2$ szög nagyobb a $B_1A_2C_1$ szög felénél, 30°-nál. Másrészt $\gamma < \beta$ és $\gamma + \beta = 60^\circ$ folytán γ kisebb 30°-nál, az ezt 60°-ra kiegészítő $A_2C_1A_1\sphericalangle = \gamma_1$ szög pedig nagyobb 30°-nál. Így az $A_1C_1A_2$ háromszögből a $C_1A_1A_2\sphericalangle = \alpha_1 = 180^\circ - \alpha_2 - \gamma_1$ szög kisebb 120°-nál. Megmutatjuk még, hogy a $B_2A_1C_1$ és $C_1A_1A_2$ szögek forgása egyirányú, vagyis A_1B_2-t A_1 körül, A_1C_1-en át 180°-nál kisebb forgás viszi át A_1A_2-be. A $B_2A_1A_2$ forgás ezek összege: $B_2A_1A_2\sphericalangle = 60^\circ + \alpha_1 < 180^\circ$. Valóban, mindkét forgás pozitív, ugyanis az $A_1B_2C_1$ háromszög egyező körüljárású $\mathbf{H}_1$-gyel, mert B_1 és B_2 az A_1C_1-nek ugyanazon partján vannak, másrészt az $A_1C_1A_2$ háromszög egyező körüljárású $B_1C_1A_2$-vel, ez pedig $B_1C_1A_1$-gyel, $\mathbf{H}_1$-gyel. Ezzel megmutattuk az állítás helyességét a 2) esetre.

A 3) esetre megmutatjuk, hogy a B_2A_2 félegyenest B_2 körül B_2C_2-be pozitiv, 180°-nál kisebb forgás viszi át, tehát a $B_2A_2C_2$ körüljárás pozitív.



3. ábra

Ehhez a 2) eset eredményeiből átvehetjük, hogy a $B_2A_1A_2$ szög pozitív, $180°$-nál kisebb forgás, ugyanis $\gamma+\beta<60°$ és $\gamma\le\beta$ folytán is áll $\gamma<30°$. Eszerint az $A_1B_2A_2$ körüljárás pozitív, B_2A_2-t, B_2A_1-be pozitív forgás viszi át. E forgás szöge kisebb $60°$-nál, mert $\alpha_2<60°$; $\gamma_1<60°$, így $\alpha_1>60°$, és $B_2A_1A_2\sphericalangle>120°$. — Másrészt az $A_1C_2B_2$ körüljárás is pozitív, mert a $C_2A_1B_2$ forgás pozitív, a $120°$-nál nagyobb pozitív $B_1A_1C_1$ forgás maradványa a kétszeri, $60°$-kal való csökkentés után. Ezért az $A_1B_2C_2$ forgás pozitív, éspedig kisebb $90°$-nál, mert az $A_1C_2B_2$ háromszögben $A_1C_2=A_1B_1\le A_1C_1=A_1B_2$, vagyis az $A_1C_2B_2$ háromszögben van az $A_1B_2C_2$ szögnél nagyobb vagy vele egyenlő szög is. Ezek szerint $A_2B_2C_2\sphericalangle=A_2B_2A_1\sphericalangle+A_1B_2C_2\sphericalangle<150°<180°$, amit bizonyítani akartunk.

Mindezzel az állítást minden lehetséges esetben bebizonyítottuk.

Sasi Éva (Makó, József A. g. II. o. t.)