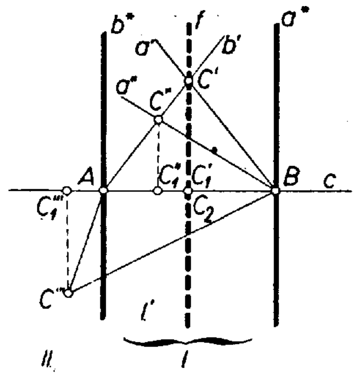
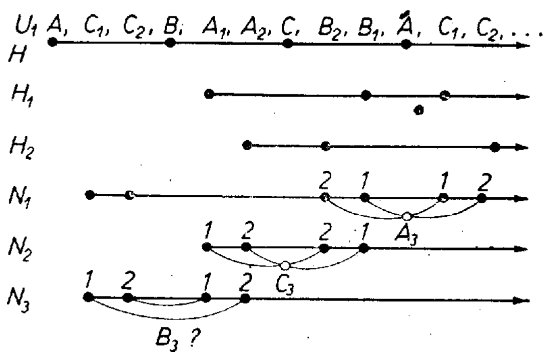
I. Menjünk végig a kérdéseken hegyesszögű háromszög esetén, vagyis legyen egyelőre $\gamma \leq \beta \leq \alpha < 90°$. Így a magasságtalppont minden oldalszakaszon belső pont, az oldalnak arra a felére esik, amelyiknek a végpontjában a háromszögnek nagyobb szöge van, és a felezőponttal akkor és csak akkor esik egybe, ha az oldal végpontjainál egyenlő szögek vannak. Ugyanis pl. az AB oldal végpontjainál levő α és β hegyes szögek nem közös szárai csak abban az I síksávban metszhetik egymást (1. ábra), amelyet az AB-re A és B-ben állított b^*, a^* merőlegesek határolnak, hiszen az ezeken túl fekvő II, ill. III félsíkokban az AC, ill. BC szárnak nincs pontja.



1. ábra

Ennélfogva C_1 valóban AB-re esik. Ha $BC = AC$, azaz $\alpha = \beta$, akkor C (az ábrán C' ilyen) az I sáv tengelyén, AB-nek f felező merőlegesén van, így $C_1' \equiv C_2$; $BC > AC$ azaz $\alpha > \beta$ esetén pedig C (az ábrán C'' ilyen) az f és b^* közti I' sávban van, így C_1 valóban az AC_2 szakaszra, a nagyobb szög oldalára esik. Mivel nekünk az oldalfelező pontot kell viszonyítanunk a magasságtalpponthoz, azért megállapításunkat így mondhatjuk ki: az oldalfelező pont a magasságtalpponttal kettévágott oldalnak a kisebb szög csúcsa felé eső szakaszán van, vagy egybeesik a talpponttal.

Így az előírt U_I útvonalon visszafordulás nincs. A_2 és A_1C szakaszon van, B_2 a CB_1-en, C_2 a C_1B-n, a pontok sorrendjét általában a 2. ábra mutatja.

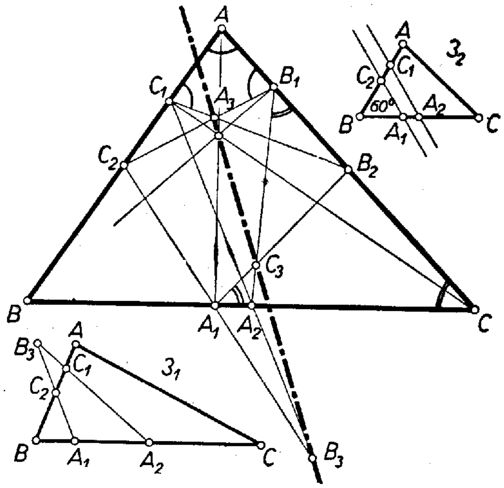


2. ábra

Egybeesések: $\alpha = \beta$ esetén $C_2 \equiv C_1$, $\beta = \gamma$ esetén $A_2 \equiv A_1$, $\alpha = \beta = \gamma$ esetén e kettőn felül még $B_2 \equiv B_1$, (vagyis $B_2 \equiv B_1$ csak egyenlő oldalú háromszögben áll fenn).

Esetünkben U_I azonos az $ABC = \mathbf{H}$ háromszög kerületének bejárásával. Az $A_1B_1C_1 = \mathbf{H}_1$ és $A_2B_2C_2 = \mathbf{H}_2$ háromszögek körüljárása viszont U_I olyan rövidítése, amelyben $\mathbf{H}$ csúcsait $\mathbf{H}_1$, ill. $\mathbf{H}_2$ oldalaival „átvágjuk", az oldalakból csak egy (belső) pontot hagyva meg, ezért $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}_1$ és $\mathbf{H}_2$ körüljárási iránya megegyező.

Ha $\mathbf{H}_1$ és $\mathbf{H}_2$-nek egy csúcsa sem közös, tehát $\gamma < \beta < \alpha < 90°$ (amiből $\alpha > 60°$, $\gamma < 60°$), akkor a vizsgálandó egyenespárok tagjai különbözők. A B_1C_2 és C_1B_2 egyenesek biztosan metszik egymást egy a $\mathbf{H}$-n belül fekvő A_3 pontban (3. ábra), mert ezek az $\mathbf{N}_1 = C_1C_2B_2B_1$ négyszög átlói, és e négyszög konvex, mert a kerülete ugyancsak átvágásos rövidítése U_I-nek (lásd a 2. ábra vázlatát), márpedig konvex négyszög átlói a négyszög belsejében metszik egymást.



3. ábra

Ugyanígy adódik az $\mathbf{N}_2 = A_1A_2B_2B_1$ konvex négyszögből, hogy A_1B_2 és B_1A_2-nek C_3 metszéspontja is létezik, éspedig $\mathbf{H}$-n belül. A C_1A_2 és A_1C_2 pár tagjai viszont az $\mathbf{N}_3 = C_1C_2A_1A_2$ konvex négyszögben szemben fekvő oldalegyenesek, így csak $\mathbf{H}$-n kívül lehet közös pontjuk; ezt – ha létezik, – B_3-mal jelöljük.

A B_1C_2, C_1B_2 egyenespár $B_1A_3C_1$ szögét az $\mathbf{N}_4 = AC_1A_3B_1$ négyszögből számíthatjuk. Mindegyik magasságtalppont a megfelelő oldal fölé írt Thalész-körön van, ezért pl. $A_1C_2 = B_1C_2 = AB/2$. Így az AB_1C_2, AC_1B_2 háromszögek egyenlő szárúak, A-nál fekvő szögük közös: α, ezért B_1-nél, C_1-nél fekvő szögük is α. Ennélfogva $\mathbf{N}_4$-ből az a $B_1A_3C_1$ szög, amelynek terében A fekszik, $360° - 3\alpha$-val egyenlő (ez $90°$ és $180°$ közé eső szög). Másképpen: A_3-ból a B_1B_2 és C_1C_2 szakaszok látószöge $180° - (360° - 3\alpha) = 3\alpha - 180°$ ($0°$ és $90°$ közé eső szög).

Kézenfekvő volna innen minden A, B, C, valamint az α betű helyére rendre C, A, B, γ-t írva, az indexeket pedig meghagyva ezt kimondani: „C_3-ból A_1A_2 és B_1B_2 látószöge $3\gamma - 180°$". Ez azonban $\gamma < 60°$ folytán negatív szög. Hasonlóan „szokatlan" eredményt ad a megelőző megállapítás „átírása" : „az az $A_1C_3B_1$ szög, amelynek terében C fekszik, $360° - 3\gamma$-val egyenlő", – ez ugyanis nagyobb $180°$-nál. Bár az utóbbit $360°$-ra kiegészítő, az A-t és B-t tartalmazó $A_1C_3B_1$ szög már jól szemlélhető, nagysága kivonással 3γ-nak adódik, és $0° < 3\gamma < 180°$, mégis joggal kételkedhetünk e „homályos" úton kapott eredményben. – Ezt azonban úgy is megkaphatjuk, ha C és C_3-hoz A_2 és B_2-t vesszük hozzá, amelyek U_I szerint közelebb vannak C-hez, mint A_1 és B_1 és amelyekkel az $\mathbf{N}_5 = CB_2C_3A_2$ négyszög konvex. A CA_1B_2 és CB_1A_2 egyenlő szárú háromszögekben C, A_1 és B_1-nél γ, ezért B_2, A_2-nél $180° - 2\gamma$ szög fekszik, tehát $\mathbf{N}_5$-ből $B_2C_3A_2\sphericalangle = 360° - \gamma - 2(180° - 2\gamma) = 3\gamma$. Eszerint az A_1A_2 és B_1B_2 szakaszok C_3-ból vett látószöge $180° - 3\gamma$. [1]

Tisztázzuk a C_1A_2, A_1C_2 egyenespár metszéspontjának helyzetét! $BA_1C_2\sphericalangle = BC_1A_2\sphericalangle = \beta$ és $BA_2C_1\sphericalangle = BC_2A_1\sphericalangle = 180° - 2\beta$, eszerint $\beta < 60°$ esetén az egyeneseknek A_1, A_2-n túli félegyenesei metszik egymást (3. ábra főrésze), $\beta > 60°$ esetén a C_1, C_2-n túliak (3_1 mellékábra), $\beta = 60°$ esetén pedig a két egyenes párhuzamos (3_2 mellékábra). Ugyanis $\beta < 60°$ mellett a két egyenes BC-vel, ennek $\mathbf{H}$-t tartalmazó partján olyan szögeket alkot, melyeknek összege nagyobb $180°$-nál: $C_2A_1A_2\sphericalangle + C_1A_2A_1\sphericalangle = (180° - \beta) + (180° - 2\beta) = 360° - 3\beta > 180°$, ezért a két egyenes BC-nek valóban nem a $\mathbf{H}$-t tartalmazó partján metszi egymást; $\beta > 60°$ esetén pedig hasonlóan $A_2C_1C_2\sphericalangle + A_1C_2C_1\sphericalangle = \beta + 2\beta = 3\beta > 180°$. – Ezek szerint $\beta < 60°$ esetén az $A_1A_2B_3$ háromszög A_1 és A_2-nél fekvő szögeinek összege $\beta + 2\beta = 3\beta$, ezért B_3-ból A_1A_2 és C_1C_2 látószöge $180° - 3\beta$, ill. $\beta > 60°$ esetén hasonlóan $3\beta - 180°$.

A szögekre tett megállapításaink $\alpha = \beta \neq \gamma$ és $\alpha \neq \beta = \gamma$ esetén is érvényesek, ilyenkor két egyenespárunk meghatározó pontjaiból egy-egy egybeesik, és β nem $60°$-os. Egyenlő oldalú háromszögben mindhárom egyenespárunk páronként egybeesik, a szögekre vonatkozó kérdés tárgytalan.

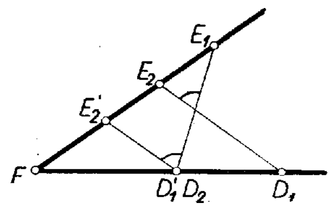
II. Derékszögű háromszög esetén $\gamma \leq \beta < \alpha = 90°$, B_1 és C_1 az A csúcsba esnek, de visszafordulás a módosult U_{II}-ben sincs. $\mathbf{H}_1$ egyenesszakasszá fajul, körüljárásáról nem beszélhetünk. A_3 is A-ba esik, így a fentebb használt $\mathbf{N}_4$ pontttá zsugorodik, a $B_1C_2 \equiv AC_2 \equiv AB$ és $C_1B_2 \equiv AB_2 \equiv AC$ egyeneseknek, vagyis a befogóknak $90°$-os szögét a fenti $360° - 3\alpha$ és $3\alpha - 180°$ képletek mégis helyesen adják meg. Többi megállapításaink változatlanul átvehetők, mert a hozzájuk vezető meggondolások érvényesek maradnak.

III. Tompaszögű háromszög esetén ($\gamma \leq \beta < 90° < \alpha$) a két hegyes szög csúcsából húzott magasság, B_1, C_1 talppontja az AC, AB oldalnak A-n túli meghosszabbítására esik, (lásd az 1. ábrán C'''-t) így az előírt U_{III} útvonalon két visszafordulás van, a bejárást újra és újra ismételve A-n 3-szor annyiszor haladunk át, mint B-n és C-n. B_2, C_2 így is CB_1-en, C_1B-n van. A pontok sorrendje, a többszörös átmeneteket is jelölve: A, C_1, A, C_2, B, A_1, A_2, C, B_2, A, B_1, A, C_1, … $\mathbf{H}_2$ körüljárása most is átvágásos rövidítése $\mathbf{H}$-énak, így körüljárásuk egyező. $\mathbf{H}_1$ körüljárása a kieső pontok miatt nem vezethető le $\mathbf{H}$-ából. $\mathbf{H}_1$ körüljárása ellentétes $\mathbf{H}$-éval, mert a két kieső talpponttal képezett

[1] A fenti két meggondolás eltérése a körüljárásból következik; figyeljük meg a 2. ábrán A és C körül az indexek elhelyezkedését!

AC_1B_1 háromszög körüljárása egyezik $\mathbf{H}$-éval, így ennek AB_1C_1 körüljárása ellentétes azokkal, $\mathbf{H}_1$ körüljárása pedig az utóbbival egyező, mert A_1 ugyanazon partján van B_1C_1-nek, mint A.

A szögekre vonatkozó vizsgálatot megrövidíthetjük. Fel kell ugyanis figyelnünk arra, hogy eddigi szög-eredményeink rendre csak α, β, γ-tól függnek, másrészt hogy a $\beta \gtreqless 60^\circ$ melletti eredmény – bár más-más meggondolással nyertük, azonos a γ-ra, ill. $60^\circ < \alpha \leq 90^\circ$-ra adódott eredménnyel. Vegyük észre, hogy tulajdonképpen a következő kérdést vizsgáltuk több változatban: D_2, E_2 az egymást F-ben metsző d, e egyenesek egy-egy tetszés szerinti, de F-től különböző pontja, egy-egy D_1, ill. E_1 pontjukat pedig az E_2, ill. D_2 középpontú, F-en átmenő körrel metsszük ki, vagyis $D_1E_2 = FE_2$, $E_1D_2 = FD_2$; mekkorák a D_1E_2 és E_1D_2 egyenesek szögei, ha $D_2FE_2\sphericalangle = \varphi$. Feladatunk céljára φ a 0° és 180° közti szög, és a $D_2F : E_2F$ arány más-más értéke szerint kapjuk mindazon háromszög alakokat, melyek egyik szöge φ; a $\varphi \leq 90^\circ$ eseteket azonban már megvizsgáltuk.



Egyszerűbb ez a kérdés, ha D_1E_2 helyett a vele D_2-n át húzott g párhuzamost tekintjük, ugyanis E_2-t g és e-nek E_2' metszéspontjával helyettesítve a kérdéses szögek változatlanok, pontjaink száma viszont csökken, mert az FD_1E_2 és FD_2E_2' háromszögek hasonlók, és ezért az E_2'-ből adódó D_1' azonos D_2-vel. Ez is mutatja, hogy a keresett szög valóban csak φ-től függhet, de a $D_2F : E_2F$ aránytól nem; tehát a tompaszögű háromszög hegyes szögeinek megfelelő C_1A_2, A_1C_2 és A_1B_2, B_1A_2 egyenespárok szögeit nem kell újra megállapítanunk. E_2' -t FD_2 felező merőlegese metszi ki e-ből (hacsak nem $\varphi = 90^\circ$, mert ekkor E_2' nem létezik), tehát $90^\circ < \varphi < 180^\circ$ esetén E_2' a φ szög FE_2 szárának F-en túl való meghosszabbításán van. Ez pedig azt jelenti, hogy a φ és $180^\circ - \varphi$ nagyságú szögekhez ugyanaz az egyszerűsített ábra tartozik, tehát a keresett szög értéke ugyanaz.

Eszerint $90^\circ < \alpha < 120^\circ$ esetén a B_1C_2, C_1B_2 egyenespár szöge akkora, mint a $90^\circ > \alpha' = 180^\circ - \alpha < 60^\circ$-nak megfelelő α' esetén: $3\alpha' - 180^\circ = 3(180^\circ - \alpha) - 180^\circ = 360^\circ - 3\alpha$; $\alpha = 120^\circ$ esetén a B_1C_2 és C_1B_2 egyenesek párhuzamosak; végül $120^\circ < \alpha < 180^\circ$ esetén akkora a szög, mint $60^\circ > \beta' = 180^\circ - \alpha > 0^\circ$ esetén, vagyis $180^\circ - 3\beta' = 180^\circ - 3(180^\circ - \alpha) = 3\alpha - 360^\circ$.

Ezzel vizsgálatunkat befejeztük.

Fritz József (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az egyszerűsített ábrából a $\varphi < 90^\circ$ esetekre is könnyebben kapjuk a keresett szöget. Pl. $0^\circ < \varphi < 60^\circ$ esetén $FD_2E_1\sphericalangle = 180^\circ - 2\varphi > 60^\circ > \varphi$, ezért $FE_1 > FE_2'$, így az FD_2E_1 és FD_2E_2' egyenlő szárú háromszögekből $\tau = E_1D_2E_2'\sphericalangle = E_1D_2F\sphericalangle - E_2'D_2F\sphericalangle = (180^\circ - 2\varphi) - \varphi = 180^\circ - 3\varphi$. Célszerű lett volna tehát a módosított problémát segédtételként előre bizonyítani. Így azonban nem látnók, miért éppen erre a segédtételre van szükség; ezért a fenti nehézkes út mégis tanulságos.

2. A fentiekkel közel járunk egy névtelen levélíró azon javaslatának teljesítéséhez, hogy időnként tegyük közzé egy-egy megoldó közlését arról, hogy „hogyan jött rá a megoldásra”.

3. Hogy tompaszögű háromszögben $\mathbf{H}_1$ ellentétes körüljárású $\mathbf{H}$-val, azt így is beláthatjuk: Legyen az AB_1BA_1 és AC_1CA_1 négyszögek átlóinak metszéspontja B^*, C^*. A négyszögek a látottak szerint konvexek, ezért B^*, C^* mindkét átlószakaszon rajta van. Így $\mathbf{H}_1$ körüljárása azonos $A_1B^*C^*$-éval, ez viszont átvágásos rövidítése az A, C^*, C, A_1, B, B^*, A útvonalnak, az ACB bejárásnak.

4. Olvassuk el a 948. feladathoz fűzött megjegyzés második bekezdését is.