$n=1$-re: $5=1^2+2^2$, $n=2$-re: $5^2=3^2+4^2$. Ha már most n páratlan: $n=2k+1$ (k nemnegatív egész), akkor $5^n=5^{2k}\cdot 5=5^{2k}\cdot 1^2+5^{2k}\cdot 2^2=\left(5^k\right)^2+\left(2\cdot 5^k\right)^2$; páros n-re pedig $n=2k$ (k pozitív egész): $5^n=5^{2k-2}\cdot 5^2=\left(3\cdot 5^{k-1}\right)^2+\left(4\cdot 5^{k-1}\right)^2$. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

A bizonyítás mutatja, hogy 5 helyett bármely olyan szám vehető alapnak, amely maga is, és négyzete is írható két természetes szám négyzetének összegeként. Ilyenek: $13(=2^2+3^2$, és $13^2=5^2+12^2)$, $17(=1^2+4^2$, és $17^2=8^2+15^2)$, $29(=2^2+5^2$, és $29^2=20^2+21^2)$, ..., $45(=3^2+6^2$, és $45^2=27^2+36^2)$, $50(=1^2+7^2=5^2+5^2$, és $50^2=14^2+48^2=30^2+40^2)$, ...

Máté Attila (Szeged, Dózsa Gy. ált. isk. VI. o. t.)

Megjegyzések. 1. Ha m két különböző természetes szám négyzetének összege: $m=a^2+b^2$, akkor a második feltételnek (m^2 ilyen felbonthatóságának) vizsgálatát mellőzhetjük, mert ez az $m^2=\left(a^2+b^2\right)^2=\left(a^2-b^2\right)^2+(2ab)^2$ átalakítás folytán teljesül. Eszerint páratlan m-re elég az a^2+b^2 előállítás. $a=b$ esetére azonban csak akkor biztosítja az említett átalakítás m^2-re a második feltétel teljesülését, ha egyik négyzetszámnak a 0-t is megengedjük. (Ebben az értelemben viszont minden szám négyzete két négyzetszám összegeként írható.) Pl. $18=3^2+3^2$, és, mint könnyen belátható, $18^2=324$ csak a 0^2+18^2 alakban írható két négyzetszám összegeként.

Detre Villő (Budapest, Lorántffy Zs. úti lg. II. o. t.)

2. Több dolgozat hivatkozott a következő tételre: *egy természetes szám akkor és csakis akkor állatható elő két négyzetszám összegeként, ha törzsszámhatványok szorzatára való felbontásában egy $4k+3$ alakú prímszám sem szerepel páratlan hatványon.*[1] Az 1. megjegyzésből látjuk, hegy négyzetszámon, *egész* szám négyzetén nem szabad okvetlenül *természetes* szám négyzetét érteni. Az idézett versenytételhez fűzött 2. jegyzetből – „*A Waring–féle problémakörről*” – láthatóan a kérdés az, hogy bizonyos alakban előállítható természetes számoknak természetes számok négyzetösszegeként való előállításához *legfeljebb* hány tag szükséges. Feladatunk viszont – kimondatlanul is – 5^n-nek pontosan két természetes szám négyzetének összegeként való előállíthatóságára kívánt bizonyítást, illetőleg hasonló tulajdonságú alapok megadását kívánta.

3. Több dolgozat az $5^1=1^2+2^2$ egyenlőségből és az $5^k=a^2+b^2$ (a, b természetes számok) feltevésből a teljes indukció módszerével kívánta bizonyítani az állítást, mondván, hogy $5^{k+1}=5\cdot 5k=5a^2+5b^2=(a+2b)^2+(2a-b)^2$. Itt $a+2b$ természetes szám, de $2a-b$ abszolút értéke 0 is lehet, éspedig ha $b=2a$, ami $5^k=a^2+4a^2=5a^2$ alapján $k=2j+1$ és $a=5^j$ esetén teljesül.

[1] L. pl. *Hajós–Neukomm–Surányi:* Matematikai versenytételek, II. rész, 59. o., Tan-könyvkiadó, 1957. Középiskolai Szakköri Füzetek.