

I. megoldás: Legyen a keresett pozitív szám $\overline{xy} = 10x + y$, vagyis $1 \leq x \leq 9$ és $0 \leq y \leq 9$. A feladat nem mondja ki, hogy a jegyek különbségében melyik jegy a kisebbítendő, így két lehetőségre kell gondolnunk:

a) vagy $10x + y = (x + y)(x - y) = x^2 - y^2$,

b) vagy $10x + y = (x + y)(y - x) = y^2 - x^2$.

Az a) eset mégsem lehetséges, mert $y^2 + y = y(y + 1) = x^2 - 10x = x(x - 10)$ -re vezet, ahol a bal oldal nem negatív, a jobb oldal pedig negatív. Eszerint $y > x$, tehát $y \geq 2$.

A b) esetből hasonló rendezéssel

$$(1) \quad x(x + 10) = y(y - 1),$$

és itt a jobb oldal páros, mint két szomszédos egész szám szorzata, eszerint a bal oldal mindkét tényezője páros, mert x és $x + 10$ együtt párosak vagy páratlanok; tehát a bal oldal $2^2 = 4$ -gyel is osztható. Sőt $2^3 = 8$ -cal is, mert vagy x osztható 4-gyel, vagy $x + 10$. A jobb oldal viszont csak úgy osztható 8-cal, ha vagy $y = 8$, vagy $y - 1 = 8$.

(1)-ből x -re csak $y = 8$ -cal kapunk pozitív egész gyököt: $x = 4$, eszerint a keresett szám 48. – Valóban, $48 = (4 + 8)(8 - 4)$.

Fekete Rozália (Celldömölk, Berzsenyi D. g. II. o. t.)

II. megoldás: Az a) eset nem lehetséges, mert $10x + y \geq 10x > x^2 \geq x^2 - y^2$. A b) alatti egyenlőséget írjuk így:

$$11x = (x + y)(y - x) + x - y = (x + y - 1)(y - x).$$

Innen

$$(2) \quad x = \frac{(x + y - 1)(y - x)}{11},$$

egész szám, és mivel $1 \leq y - x \leq 8$, és e határok között minden egész szám relatív prím 11-hez, azért $x + y - 1$ osztható 11-gyel. Minthogy $y \leq 9$, $x < y$, azaz $x \leq 8$, azért $x + y - 1 \leq 16$, másrészt $x \geq 1$, $y \geq 2$ folytán $x + y - 1 \geq 3$, ennél fogva $x + y - 1$ egyetlen lehetséges értéke 11. Most már $x + y = 12$ és (2)-ből $x = y - x$, $y = 2x$, így $x = 4$, $y = 8$, tehát a keresett szám 48.

Bollobás Béla (Bp. V., Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t)