$\sqrt[3]{2}$ irracionális szám, mert az a feltevés, hogy racionális, ellentmondásra vezet. Tegyük fel ugyanis, hogy $\sqrt[3]{2}$ írható két egész szám hányadosaként, azaz p/q alakban, és ezt már egyszerűsítettük, vagyis p és q relatív prímek. Így $p^3 = 2q^3$, eszerint p^3 páros, tehát p is, – mert páratlan szám köbe páratlan: $(2k+1)^3 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1$. Írhatjuk tehát: $p = 2s$. Így viszont $p^3 = 8s^3 = 2q^3$-ből $q^3 = 4s^3$, tehát q^3 és q is páros. Ez valóban ellentmondás, mert így p és q-nak a 2 közös osztója. Eszerint a kívánt alakú előállításban $b \neq 0$, különben $a + b\sqrt{c}$ racionális volna.

Tegyük fel már most, hogy van ilyen előállítás:

$$\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{c}.$$

Ebből köbre emeléssel, kiemeléssel, $b\sqrt{c} = \sqrt[3]{2} - a$ helyettesítéssel és rendezéssel

$$2 = a^3 + 3ab^2c + (3a^2 + b^2c)b\sqrt{c} = a^3 + 3a^2bc + (3a^2 + b^2c)(\sqrt[3]{2} - a),$$
$$2(1 + a^3 - ab^2c) = (3a^2 + b^2c)\sqrt[3]{2}.$$

Itt $\sqrt[3]{2}$ szorzója feltevéseinknél fogva pozitív, nem 0, tehát

$$\sqrt[3]{2} = \frac{2(1 + a^3 - ab^2c)}{3a^2 + b^2c}$$

ami ismét ellentmondás, mert a jobb oldalon racionális számok racionális kifejezése áll, ami racionális szám, a bal oldal pedig irracionális.

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Bellay Ágnes (Bp. VIII., Fazekas M. lg. I. o. t.)

Megjegyzés: Feladatunk visszavezethető szakaszok szerkeszthetőségének vizsgálatára. Ismeretes, hogy egy szakasz alapadatokból (szakaszokból, egyenes vonalú síkidomok területéből) körző és vonalzó használatával akkor és csak akkor szerkeszthető, ha mértékszáma az adatok mértékszámából a négy alapművelet és a négyzetgyökvonás véges számú alkalmazásával kiszámítható. Így a, b, c és a $a + b\sqrt{c}$ az egységszakaszból szerkeszthetők. – Másrészt $\sqrt[3]{2}$ nem szerkeszthető meg, a „déloszi probléma"– adott kockához egy kétszer akkora térfogatú kocka élének (körzővel és vonalzóval való) megszerkesztése – megoldhatatlan.[1]

Bollobás Béla (Bp. V., Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)

Fritz József (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. II. o. t.)

[1] Mindezeket lásd pl. *Surányi János:* A szögharmadolás kérdéséről, KML. XIV. 97-107. és 129-134. o. (1957. április-május).