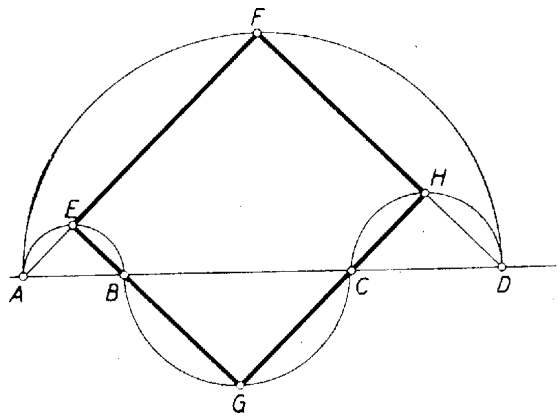
I. megoldás: Az ABE, ADF, CBG és CDH háromszögek szerkesztésüknél fogva derékszögűek és egyenlő szárúak, így A, B, C, D-nél fekvő szögeik 45°-osak. Ezért az A, E, F, az E, B, G, a G, C, H és a D, H, F ponthármasok egy-egy egyenesbe esnek. Továbbá ennek a négy egyenesnek mindegyike merőleges a következőre és az utolsó az elsőre. Ennélfogva az $EFHG$ négyszög derékszögű.



1. ábra

Legyen az AB, CB és CD szakaszok hossza rendre $2e$, $2f$, $2g$; így $AD = 2(e+f+g)$. Ekkor négyszögünk oldalai: $EG = EB + BG = \sqrt{2}e + \sqrt{2}f = \sqrt{2}(e+f)$ és $GH = GC + CH = \sqrt{2}f + \sqrt{2}g = \sqrt{2}(f+g)$. Ezekből a területe:

$$t_1 = EG \cdot GH = 2(e+f)(f+g)$$

Másrészt félköreink sugarai rendre e, $e+f+g$, f, g. Az általuk bezárt területet úgy kapjuk, hogy az AD és CB átmérő fölötti félkörök területének összegéből kivonjuk az AB és CD átmérő fölötti félkörök területének összegét. Az $\pi/2$ közös tényezőt mindjárt kiemelve:

$$t_2 = \left[(e+f+g)^2 + f^2 - e^2 - g^2\right]\pi/2. \tag{1}$$

Alakítsuk szorzattá a zárójelben az első és harmadik, valamint a második és a negyedik tagot, majd emeljük ki az adódó $(f+g)$ közös tényezőt. Így

$$\begin{aligned} t_2 &= \left[(2e+f+g)(f+g) + (f-g)(f+g)\right]\pi/2 = \\ &= (2e+f+g+f-g)(f+g)\pi/2 = (e+f)(f+g)\pi. \end{aligned}$$

A két terület aránya: $t_1 : t_2 = 2 : \pi$, és ez valóban független az AB, BC, CD szakaszok hosszától.

Szendrői Csaba (Sopron, Kempelen F. Gépip. t. II. o. t.)

II. megoldás: Az I. megoldást, miután megállapítjuk, hogy a négy ponthármas egy-egy egyenesen van, így is folytathatjuk. Az $EFHG$ négyszög t_1 területét úgy kaphatjuk, hogy az ADF és BCG egyenlő szárú derékszögű háromszögek területének összegéből kivonjuk az ABE és CDH egyenlő szárú derékszögű háromszögek területének összegét. Jelöljük ezeket általában $t(c)$-vel, c helyére mindig a megfelelő átfogót írva. Ekkor

$$t_1 = t(AD) + t(BC) - t(AB) - t(CD).$$

Hasonlóan összeadásokkal és kivonással kapjuk a görbevonalú idom területét a szóban forgó félkörök területéből. Jelöljük a c átmérőjű félkör területét $T(c)$-vel így:

$$t_2 = T(AD) + T(BC) - T(AB) - T(CD).$$

Már most általában:

$$t(c) : T(c) = \frac{c^2}{4} : \frac{c^2\pi}{8}, \quad \text{és így} \quad t(c) = \frac{2}{\pi}T(c).$$

Ennek alapján

$$t_1 = \frac{2}{\pi}T(AD) + \frac{2}{\pi}T(BC) - \frac{2}{\pi}T(AB) - \frac{2}{\pi}T(CD) = \frac{2}{\pi}t_2, \quad \text{tehát} \quad \frac{t_1}{t_2} = \frac{2}{\pi}.$$

Evvel az állítást bebizonyítottuk.

Bollobás Béla (Bp. V., Apáczai Csere J. Gyak. g. II. o. t.)

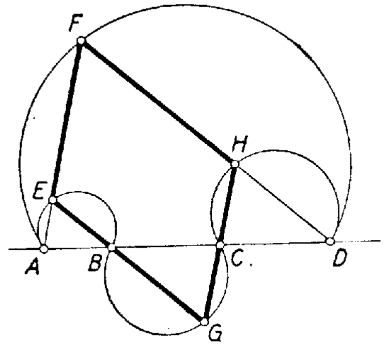
Megjegyzések. 1. A II. megoldás gondolatával és az I. megoldás jelöléseivel

$$t_1 = \frac{1}{4}\left[(2e+2f+2g)^2 + (2f)^2 - (2e)^2 - (2g)^2\right] =$$
$$(e+f+g)^2 + f^2 - e^2 - g^2$$

és ez (1)-gyel egybevetve átalakítás nélkül vezet a kívánt eredményhez.

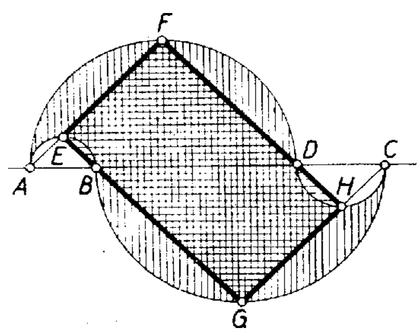
2. A feladat állítását többféleképpen is lehet általánosítani.

Akkor is érvényes az állítás, ha egyenlő szárú derékszögű háromszögek helyett olyan hasonló és azonos körüljárási értelmű ABE, ADF, CBG, CDH háromszögeket írunk az AB, AD, CB, CD szakaszokra, amelyeknek e szakaszok megfelelő oldalai, a félkörívek helyett viszont a háromszögek köré írt körnek az E, F, G, H csúcsot tartalmazó AB, AD, CB, CD ívét (2. ábra).

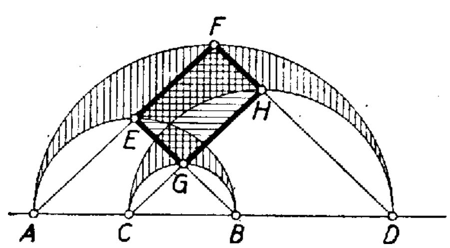


2. ábra

Ha az A, B, C, D pontok sorrendje más, akkor amely szakasz végpontjai az eddigivel szemben fordított sorrendben következnek egymásra, arra a félkört az egyenesnek az eddigivel átellenes oldalán írva ugyancsak érvényes marad az állítás. Ha ilyenkor a 4 félkör 4 csúcsot alkot, akkor a görbevonalú idom két részből áll (3–4. ábrák).



3. ábra



4. ábra