

Hogy a kifejezésnek értelme legyen, már első látásra fel kell tennünk, hogy az a, b, c számok közül kettő-kettőnek sem az összege, sem a különbsége nem 0, más szóval a, b, c abszolút értékben különböző számok. Jelöljük K egymás utáni tagjait K_1, K_2, K_3 -mal. K_2 és K_3 az előttük álló tagból úgy is előállíthatók, hogy a, b, c helyére rendre b, c, a -t írunk, ezért egyelőre elég K_1 -et egyszerűsíteni. K_1 számlálója, ill. nevezője a törtek összevonásával

$$\frac{(b+c)(c+a) - 2(a+b)(c+a) + (a+b) + (b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

$$\frac{(b+c)(c-a) - 2(b-a)(c-a) + (b-a)(b+c)}{(b-a)(b+c)(c-a)} = \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{(b-a)(b+c)(c-a)}.$$

Hogy az utóbbi, valamint K_2 és K_3 -nak a fentiek szerint ebből előállítható nevezői is 0-tól különbözők legyenek, fel kell tennünk, hogy

$$(1) \quad b^2 + c^2 - 2a^2 \neq 0, \quad c^2 + a^2 - 2b^2 \neq 0, \quad a^2 + b^2 - 2c^2 \neq 0.$$

Így $b^2 + c^2 - 2a^2$ -nel egyszerűsítve

$$K_1 = \frac{(b-a)(b+c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

(A $b+c$ tényezővel egyszerűsíteni csak látszateredmény volna, mert a további közös nevezőben ez a tényező is fellép.) Most már a fent említett szabályszerűség felhasználásával

$$K = \frac{(b-a)(b+c)(c-a)}{(a+c)(b+c)(c+a)} + \frac{(c-b)(c+a)(a-b)}{(b+c)(c+a)(a+b)} + \frac{(a-c)(a+b)(b-c)}{(c+a)(a+b)(b+c)}.$$

A nevezők csak a tényezők sorrendjében különböznek, tehát egyenlők, ezért egyelőre elég képeznünk a számlálók összegét. A várható összevonási lehetőségekre tekintettel jónak látszik beszorozni; ennek során mindegyik számláló három kéttagújának szorzata $2^3 = 8$ tagot ad. Az első számláló így írható:

$$S_1 = a^2b + a^2c + b^2c + bc^2 - ab^2 - ac^2 - 2abc,$$

ennek alapján

$$S_2 = b^2c + b^2a + c^2a + ca^2 - bc^2 - ba^2 - 2abc,$$

$$S_3 = c^2a + c^2b + a^2b + ab^2 - ca^2 - cb^2 - 2abc,$$

és összegük

$$S = a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b - 6abc.$$

A tagok felírása nélkül is látható, hogy a közös nevezőbeli beszorzásnál a $-6abc$ tagtól eltekintve S -nek valamennyi tagja előáll. Pl. a^2b úgy, hogy $(a+b)(b+c)(c+a)$ gondolatban való képezésénél az egymás utáni zárójelekből az első, első, második tagot szorozzuk össze. Két zárójelnek első és egynek második tagját összeszorozva mindig x^2y „típusú” tagot kapunk, és akkor is, ha kettőből a másodikat és egyből az elsőket vesszük ki, és ez a 6 tag egymástól különböző, akárcsak S -nek első 6 tagja. A nevező hátralevő szorzatai $2abc$ -t adnak – a 3 első és a 3 második tag szorzata –, eszerint az S összeg $-8abc$ -vel tér el a nevezőtől, ennyivel „kisebb” nála:

$$S = (a+b)(b+c)(c+a) - 8abc,$$

és így

$$(2) \quad K = 1 - \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Az $a = 5, b = 7, c = 9$ számok abszolút értékben különbözők; az (1) kifejezések közül nyilván elég $a^2 + c^2 - 2b^2$ értékét kiszámítani, amelyben a nagyságra nézve középső 7 adja a kivonandót, de ez sem 0, tehát K -nak van értelme. (2)-ből $K = 1/16 = 0,0625$, ennek kiszámítása céljára 3 összeadást, $2 + 3 = 5$ szorzást, 1 osztást és 1 kivonást végeztünk, összesen 10 műveletet.

K -nak az eredeti alakból való számítása során a, b, c -ből elsősorban 3 összeget és 3 különbséget képeznénk, ezekből 6 reciprok értéket, majd az összegek reciprok értékének megkétszerezését; ez eddig 15 művelet. Az így előkészített „elemekből” mind a 6 „nagy” számláló és nevező összeállítása 2 – 2 összevonást igényelne, ezt 3 osztás követné és a számítás 2 összeadás zárná be. Mindez együttvéve $15 + 12 + 3 + 2 = 32$ művelet.

Az $a = 5, b = 7, c = 1$ adathármas mellett a „gyanús” $b^2 + c^2 - 2a^2$ érték 0-nak bizonyul, K -nak nincs értelme.

Az algebrai átalakítások előnye az első példában abban mutatkozott meg itt, hogy K értékét az egyszerűbb alakból jóval kevesebb művelettel számíthattuk, a második példában pedig abban, hogy jelentős mennyiségű hiábavaló számítást takarítottunk meg. Természetesen előnyt nyújtott K szimmetrikus voltának felismerése, valamint az is, hogy K csak 3 számból volt felépítve. Bár az átalakítással jelentős munkát végeztünk, ez a kapott egyszerű alaknak esetleg sokszori alkalmazása során megtérül.

Pollai Marion (Bp. V., Veres Pálné lg. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A kifejezés így is írható

$$K = \frac{a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

ebből az alakból 17 művelettel kapjuk K értékét.

Kéry Gerzson (Sopron, Széchenyi I. g. I. o. t.)

2. Sok dolgozat 53 műveletet mutat ki az eredeti alakból való számításban, nem véve figyelembe a többször előforduló kifejezéseket.

3. Számos dolgozatot a $0/0 = 0$ állítás miatt nem fogadhattunk el. Ennek helytelenségére már az is figyelmeztethetett volna, hogy K átalakított formájának a második értékhármásra is van értelme, és a 0-tól különböző $37/72$ értéket adja.