A kétjegyű számok négyzetei három- vagy négyjegyűek. Legyen a két négyzetszám X^2 és Y^2; feltehetjük, hogy X és Y pozitívok és $X > Y$. A követelés szerint a négyzetszámok különbségében az 1-es, tízes és ezres helyeken 0 áll, tehát

$$X^2 - Y^2 = (X-Y)(X-Y) = 100t = 2^2 \cdot 5^2 t, \tag{1}$$

ahol t egész szám és $1 \leqq t \leqq 9$[1]

Mivel $X - Y < X + Y$, így (1)-ből

$$(X-Y)^2 < (X-Y)(X+Y) = 100t, \quad X - Y < 10\sqrt{t} \leqq 30. \tag{2}$$

$X-Y$ és $X+Y$ közül legalább az egyik páros; de akkor a másik is, mert két egész szám összege és különbsége egyenlő párosságú. Hogy (1) bal oldala 5-nek legalább 2-ik hatványával osztható legyen, erre két lehetőséget kell figyelembe vennünk: α) $X - Y$ és $X + Y$ mindegyike osztható 5-tel, β) $X + Y$ osztható 25-tel. Nem lehet ugyanis, hogy $X - Y$ legyen osztható 25-tel, mert akkor $X - Y = 50j$ volna, de ez (2) miatt teljesíthetetlen.

α) $X + Y$ és $X - Y$ osztható 5-tel és páros is, ezért

$X + Y = 10k, \qquad X - Y = 10l,$

ahol k és l pozitív egész, $k > l$ és (2) szerint $l \leqq 2$. Írjuk még k-t $l + m$ alakban, ekkor $X = 5(k + l) = 10l + 5m$, $Y = 5(k - l) = 5m$, $X^2 = 100l(l + m) + 25m^2$, $Y^2 = 25m^2$. Így $m \geqq 2$ (mert Y kétjegyű), továbbá $l(l + m) < 10$, sőt $100l(l+m)$ és $25m^2$ százasai együtt sem érhetik el az 1000-et. Eszerint $m = 5, 6, 7, 8$-ra $l(l+m)$-nek rendre kisebbnek kellene lennie, mint $4, 1, -2, -6$, ez azonban nem lehetséges, így $m \leqq 4$.

A fennmaradt m-értékek mellett lehetséges l-értékekkel a következő megoldások adódnak:

m	1	2	3	4
l	1	2	1	1
X	20	30	25	30
Y	10	10	15	20
X^2	400	900	625	900
Y^2	100	100	225	400

β) $X + Y$ osztható 25-tel, $X + Y = 50k$, $X - Y = 2l$, ahol $X + Y \leqq 99 + 98 \leqq 200$ folytán k lehetséges értékei 1, 2, 3. Ekkor

$$X = 25k + l, \quad Y = 25k - l,$$

$kl = t \leqq 9$, vagyis X és Y a számegyenesen a 25, 50, 75 számokra szimmetrikus helyzetű számok, elegendő az l eltérést meghatároznunk.

$k = 1$ esetén l legfeljebb 9 lehet, az ezres jegyek egyezésének követelménye folytán azonban csak az $l \leqq 6$ számok adnak megoldást:

$$X^2 = 676, \quad 729, \quad 784, \quad 841, \quad 900, \quad 961,$$
$$Y^2 = 576, \quad 529, \quad 484, \quad 441, \quad 400, \quad 361.$$

(A táblázat utolsó megoldását újra megkaptuk, mert abban $t = 5$ folytán $X^2 - Y^2$ az 5^3-nek is többszöröse.)

$k = 2$-vel l legfeljebb 4 lehet, mind a négy számpár megfelel, $k = 3$-mal pedig $l \leqq 3$, de $l = 3$ már nem megfelelő:

$$X^2 = 2601, \quad 2704, \quad 2809, \quad 2916, \quad 5776, \quad 5929,$$
$$Y^2 = 2401, \quad 2304, \quad 2209, \quad 2116, \quad 5476, \quad 5329.$$

Mindezek szerint 15 megfelelő négyzetszám-pár van, a 100, 400 és 900 négyzetszámok mindegyike két párban szerepel.

Katona Mária (Bp. I., Szilágyi E. gyak. lg. I. o. t.)

[1] Ezzel X^2 és Y^2 jegyei közül csak a tízesek és 1-esek megegyezését használtuk ki, ugyanis (1) csak szükséges, de nem elegendő feltétele követelményünk teljesülésének. Az ezresek egyezésének követelményét később is csak az (1)-et kielégítő, de a feladatnak nem megfelelő esetek kiküszöbölésére fogjuk felhasználni.