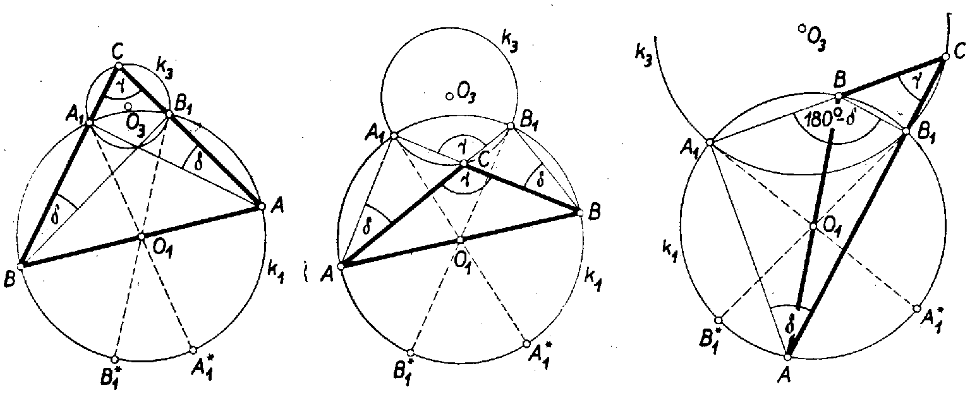
Megoldás: Legyen ABC egy az előírásoknak megfelelő háromszög; az adott talppontok legyenek az $a = BC$ és $b = CA$-ra merőleges magasságok A_1, ill. B_1 talppontjai, továbbá legyen adott az AA_1 magasság és a CA oldal közti CAA_1 szög, jelöljük ezt δ-val. Feltehetjük, hogy A_1 és B_1 különbözők, δ egy $0°$-tól különböző hegyes szög, és $ABC\sphericalangle \neq 90°$; egyrészt ugyanis a három kizárt feltétel bármelyikéből következik, hogy a másik kettő is teljesül, és akkor minden olyan derékszögű háromszög megfelel a követelményeknek, melynek derékszögű csúcsa az adott $A_1 \equiv B_1 \equiv C$ pont, másrészt egy háremszögben egy magasság az ezzel közös csúcsból induló oldalakkal hegyesszöget zár be, tehát $\delta < 90°$ kell hogy legyen.

Az A_1, B_1 talppontok az AB oldal fölé írt Thales-körön vannak, mégpedig az AB egyenes egy oldalán vagy ellenkező oldalán, aszerint, amint az ABC háromszögben sem A-nál, sem B-nél nincs tompaszög, vagy az egyik szög tompa. Az első esetben az A_1B_1 szakasz A-ból is, B-ből is δ szög alatt látszik, a második esetben a két csúcs egyikéből δ, a másikéból $180° - \delta$ szög alatt. (Ha pl. A egybeesik B_1-gyel, akkor az egyik látószög nem létezik.) Mivel A_1B_1 és δ adott, ezek meghatározzák a kör sugarát. A és B számára két ilyen k_1 és k_2 kör felel meg, amelyek egymás tükörképei az A_1B_1 egyenesre; a rajzokon csak az egyiket tüntettük fel. Nem kapunk azonban valódi háromszöget, ha A egybeesik A_1-gyel, és így B az ezzel átellenes A_1^* pontba kerül, vagy ha B esik B_1-be, tehát ha A az ezzel átellenes B_1^*-gal esik egybe.



Ha most már felvesszük A-t tetszés szerint, csak A_1- től és B_1^*-tól különbözőnek k_1-en, ez egyértelműen meghatározza a háromszöget: B a k_1 kör A-val átellenes pontja, C pedig az AB_1 és BA_1 egyenesek metszéspontja, ha $A \not\equiv A_1^*$. Ha $A \equiv A_1^*$, tehát $B \equiv A_1$, akkor a BC oldalegyenest mint az $AA_1 \equiv AB$ magasságra az $A_1 \equiv B$ pontban merőleges egyenest kapjuk meg.

Ha a C metszéspont a k_1 körön kívül van, akkor A_1 a $\gamma = ACB$ szögnek CB szárára (a CB szakaszra vagy B-n túli meghosszabbítására) esik, és így γ az AA_1C derékszögű háromszög hegyesszöge, amiből $\gamma = 90° - \delta$. Ha viszont C a k_1 körbe esik, akkor A_1 a CB szár C-n túli meghosszabbítására esik. Így γ az AA_1C háromszög külső szöge, tehát $\gamma = 90° + \delta$. Ezek szerint C olyan, A_1-en és B_1-en átmenő körön van, amelynek a pontjaiból az A_1B_1 szakasz $90° - \delta$, vagy $90° + \delta$ szögben látszik.

Ilyen kör kettő van, k_3 és k_4, egymásnak tükörképei az A_1B_1-re. Megmutatjuk, hogy ha A-t a k_1-en választjuk, akkor C azon a k_3-on van, amelynek O_3 középpontja A_1B_1-nek ellenkező oldalán van, mint a k_1 kör O_1 középpontja. – Ha C a k_1 körbe esik, akkor, mint láttuk, $\gamma = 90° + \delta$, tompa szög, így α és β hegyes szögek, A és B az A_1B_1-nek egy oldalán vannak, és ugyanezen az oldalon van O_1 is, mint az AB szakasz felezőpontja. Az ABB_1A_1 konvex négyszög átlóinak metszéspontjaként C is ugyanezen oldalán van A_1B_1-nek, ennélfogva az A_1, B_1, C-vel meghatározott k_1 körnek az A_1CB_1 szög szárai közé eső íve az ellenkező oldalon van. Ehhez az ívhez O' középpontjában $2(90° + \delta) > 180°$-os szög tartozik, ezért O' ugyancsak a C-vel ellentétes oldalon van, így O', ill. k' valóban azonos O_3, ill. k_3-mal.

Ha C a k_1-en kívül van, akkor egyszersmind A_1B_1-nek O_1-gyel ellenkező oldalán van. Ugyanis ilyenkor $\gamma = 90° - \delta$, hegyesszög. Ha α és β is hegyesszögek, akkor A és B ismét O_1 oldalán vannak, hegyesszögű háromszögben pedig A_1 és B_1 elválasztják C-t B, ill. A-tól. Ha pedig pl. β tompaszög, akkor B a k_1-nek rövidebb A_1B_1 ívén van, az A_1B_1 egyenesnek O_1-gyel ellenkező oldalán, mert $A_1BB_1\sphericalangle = 180° - \delta > 90°$, C pedig az A_1B szakasznak B-n túli meghosszabbításán. – Ezek szerint k'-nek az A_1CB_1 szög szárai közé eső, $2(90° - \delta) < 180°$-os középponti szöghöz tartozó íve az O_1 oldalán van, ezért O' ismét az ellenkező oldalon van.

C a k_3-nak bármely az A_1 és B_1-től különböző pontja lehet, ugyanis így A_1 és B_1-gyel együtt szintén egyértelműen meghatározza a háromszöget: A a $CB_1 = b$ egyenes és $CA_1 = a$-ra az A_1-ben merőleges egyenes metszéspontja, és hasonlóan kapható B is. Viszont pl. $C \equiv A_1$ feltevése a kizárt $ACB\sphericalangle = 90°$ esetre vezet.

Eredményünk így is kimondható: ha egyenesszakasszá elfajult háromszöget nem fogadunk el, akkor A és B egyik mértani helye a k_1 kör az A_1 és B_1^*, ill. B_1 és A_1^* pontok kivételével, és C mértani helye k_3 az A_1 és B_1 pontok kivételével; k_1 és k_3 helyére k_2, k_4-et írva megállapításunk a másik mértani hely-párt adja, a „csillagos” pontokat természetesen azokon véve.

Megjegyzések. 1. Akik ismerik a háromszög Feuerbach-körének alaptulajdonságait, azok számára nyilvánvaló, hogy O_3 felezi a háromszög C-ből kiinduló magasságának C és az M magasságpont közti szakaszát, ennélfogva O_3C az A-nak bármely helyzetében merőleges AB-re. Ha tehát A (és vele B) a k_1-en egyenletesen forog, akkor ugyanez áll C-re is a k_3-on, és mindhárom csúcs egyszerre érkezik a kizárt pontokba.

2. A legtöbb dolgozat csak azt állapította meg, hogy A és B egy olyan köríven vannak, amelynek pontjaiból A_1B_1 látószöge δ, de nem vették észre, hogy A és B e körnek mindig átellenes pontjai, továbbá, hogy az ABC háromszög tompaszögű is lehet.