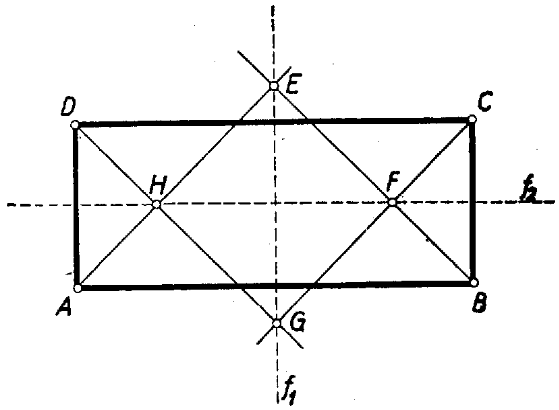
I. megoldás: Ha az $ABCD$ téglalap oldalai egyenlők, akkor a négy szögfelező egy pontban metszi egymást, a négyzetté specializálódott téglalap középpontjában, vagyis nem határolnak idomot.

A továbbiakban feltesszük, hogy $AB > BC$. Legyen az AB oldal végpontjainál levő BAD, ill. CBA szög felezőinek metszéspontja E, és hasonlóan kapjuk a BC, CD, DA oldalak révén az F, G, H pontokat.



1. ábra

Az $EFGH$ négyszög mindenesetre derékszögű paralelogramma, mert minden szöge derékszög, pl. E-nél levő szögét a BAD és CBA társszögek felezői alkotják, az ilyenek pedig merőlegesek egymásra.

Másrészt $EFGH$ bármely két szomszédos oldala egyenlő, pl. $FE = HE$, mert az ABE, BCF és DAH derékszögű háromszögek A, B, C és D csúcsainál levő szögek $45°$-osak, így ezek a háromszögek egyenlő szárúak, az utóbbi kettő egybevágó is, ezért $AE = BE$, $AH = BF$, és így $HE = AE - AH = BE - BF = FE$. Ezek szerint az $EFGH$ négyszög *derékszögű rombusz*, vagyis *négyzet.*

Felszeghy Tamás (Debrecen, Kossuth L. gyak. g. I. o. t.)

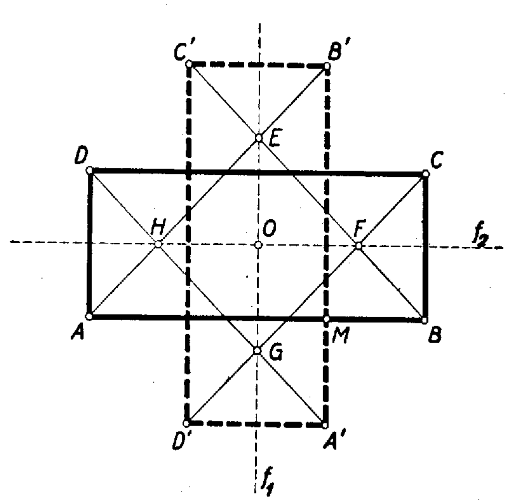
Megjegyzés. Hogy az $ABCD$ paralelogramma *derékszögű*, ezt csak a 3-ik bekezdésben használtuk ki. Eszerint $EFGH$-nak derékszögű paralelogramma volta minden nem egyenlő oldalú paralelogrammában igaz. (Egyenlő oldalúakban a négy szögfelező egy pontban fut össze.)

II. megoldás: Az előző bizonyítást $FE = HE$ megmutatása helyett így is befejezhetjük: F és H rajta vannak a BC, ill. DA oldal közös felező merőlegesén, vagyis az FH átló merőleges BC-re. Hasonlóan EG merőleges AB-re. Így AB és BC merőlegessége folytán az $EFGH$ négyszög *merőleges állókkal bíró derékszögű* paralelogramma, vagyis *négyzet.*

Gálfi László (Bp. VIII., Fazekas M. g. I. o. t.)

Megjegyzés. Az említett f_1, f_2 felező merőlegesek $ABCD$-nek szimmetriatengelyei, és a rajtuk való tükrözés $EFGH$ oldalegyeneseit is egymásba, $EFGH$-t pedig mint egészet önmagába viszi át, vagyis f_1 és f_2 az $EFGH$ *derékszögű* négyszögnek nemcsak átlói, hanem szimmetriatengelyei is. Ezt a tulajdonságot csak négyzet átlói mutatják.

III. Megoldás. Forgassuk el az $ABCD$ téglalapot O középpontja közül $90°$-kal $A'B'C'D'$-be, és jelöljük AB és $A'B'$ metszéspontját M-mel.



2. ábra

A két téglalap szimmetriatengelyei közösek, ezért $MA' = MB = (AB - BC)/2$, így $MA = MB'$, az $AB'M$ háromszög derékszögű és egyenlő szárú, vagyis az A és B' csúcsoknál levő szögek felezői egybeesnek. Ugyanez áll a B és C', a C és D', a D és A' szögek felezőire. Eszerint az eredeti szögfelezők olyan idomot alkotnak, amely (egy bizonyos pont körüli) $90°$-os elforgatással önmagába megy át. Ez a tulajdonsága a négyszögek közül csak a négyzetnek van meg.