Előzetes megjegyzés: Az egyenlőség mindkét oldalát az a, b, M, N és x számokból a négy alapművelettel számítjuk (racionális kifejezések). Ezek közül az osztás az egyetlen olyan, amely körültekintést igényel atekintetben, hogy végrehajtható-e, éspedig hogy nem 0-val kívánunk osztani. Így egyenlőségünknek akkor és csak akkor van értelme, ha $x-a, x-b$ és $a-b$ egyike sem 0, azaz $x \neq a$. $x \neq b$ és $a \neq b$. (Ennek kimondását a II. osztályos megoldók elmulasztották, az elsősök pedig akkor még nem is tudtak róla.) Egyébként a szokásnak megfelelően a, b, M, N-et tetszés szerinti állandóknak, x-et változónak tekintjük.

I. megoldás: Hozzuk közös nevezőre a jobb oldali törteket, rendezzük x szerint a számlálót és végezzük el benne a lehetséges kiemeléseket:

$$\frac{Ma+N}{a-b}\cdot\frac{1}{x-a}-\frac{Mb+N}{a-b}\cdot\frac{1}{x-b}=\frac{(Ma+N)(x-b)-(Mb+N)(x-a)}{(a-b)(x-a)(x-b)}=$$
$$=\frac{(Ma-Mb)x+(-Nb+Na)}{(a-b)(x-a)(x-b)}=\frac{M(a-b)x+N(a-b)}{(a-b)(x-a)(x-b)}=$$
$$=\frac{(a-b)(Mx+N)}{(a-b)(x-a)(x-b)}.$$

A legutóbbi alak $(a-b)$-vel egyszerűsítve éppen a bal oldal, tehát az egyenlőség valóban azonosság a benne előforduló betűknek mindazon értékeire, amelyekre a kifejezések értelmezve vannak.

Gyuris Éva (Gyöngyös, Vak Bottyán g. I. o. t.)

II. megoldás: A bizonyítandó azonosság módot ad arra, hogy a bal oldalon álló, másodfokú nevezőjű racionális kifejezést (függvényt) két egyszerűbb, elsőfokú nevezőjű racionális tört összegeként írhassuk. Ennek megfelelően kérdésünket úgy is felvethetjük, mintha csak a bal oldali kifejezést ismernők, továbbá azt, hogy milyen alakú felbontást keresünk: mely A és B együtthatók mellett lesz az

(1) $$\frac{Mx+N}{(x-a)(x-b)}=A\cdot\frac{1}{x-a}+B\cdot\frac{1}{x-b}$$

egyenlőség azonosság (természetesen $x=a$, $x=b$, valamint $a=b$ kivételével)?

A törtek eltávolításával és x szerinti rendezéssel

(2) $$Mx+N=(A+B)x-(bA+aB).$$

Ez akkor és csak akkor azonosság, ha x együtthatója és az x-mentes tag a két oldalon megegyezik:

$$A+B=M$$

és

(3) $$-(bA+aB)=N.$$

Ez a követelés az A és B ismeretlenekre egyenletrendszert ad, megoldása:

$$A=\frac{Ma+N}{a-b},\quad B=-\frac{Mb+N}{a-b}.$$

Ezek megegyeznek az adott együtthatókkal, tehát az egyenlőségünk valóban azonosság.

Tomcsányi Gyula (Bp. I., Toldy F. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A és B úgy is meghatározhatók, hogy két határozott x helyre írjuk fel azt a követelést, hogy (2)-nek két oldala egyenlő legyen. Célszerűek erre az $x=a$ és $x=b$ helyek, ezekkel ugyanis (2)-nek rendezés előtti

(4) $$Mx+N=A(x-b)+B(x-a)$$

alakjából előre látni, hogy az előbbi egyenletrendszer helyett két egyismeretlenes egyenletet kapunk:

$$Ma+N=A(a-b)$$

és

$$Mb-N=B(b-a)$$

és ezekből A és B meghatározása még egyszerűbb.

Török László (Ózd, József A. g. II. o. t.)

2. Vegyük észre, hogy itt x-nek éppen azt a két helyet választottuk, amelyre (1) nincs értelmezve, amelyet előre kizártunk. Meg kell ezért gondolnunk, hogy helyes volt-e eljárásunk. Helyes volt, mert (1)-gyel együtt (4)-re is áll követelésünk, hogy ti. $x=a$ és $x=b$ kivételével minden helyen álljon. Ez végtelen sok helyet jelent, ami több, mint kettő. Ha pedig a (4)-nek két oldalán álló *első*fokú polinomok legalább két helyen egyenlő értéket vesznek fel, akkor azonosak, mindenhol egyenlők, így az előbb kizárt a és b helyeken is, értelmezési tartományukba ugyanis kivétel nélkül minden szám beletartozik.

3. A és B-re felírt egyenletrendszerünk (3) egyenlete is tekinthető az 1. megjegyzésbeli meggondolás példájának, ez az $x=0$ helyre követeli (2), ill. (4) két oldalának egyenlőségét.