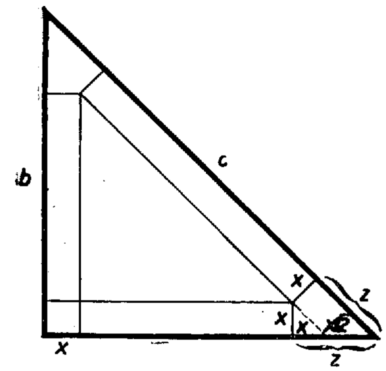
Legyen a doboz magassága x és az adott lemez befogóinak közös hossza b. Ezekkel a doboz alapidomának befogói (l. az ábrát) $b-x-z=b-(2+\sqrt{2})x$ hosszúak, a térfogat pedig

$$V=\frac{1}{2}\,[b-(2+\sqrt{2})x]^2x.$$



V-nek ugyanazon x mellett van maximuma, mint $2V$-nek, amely három csak az x-től függő, változó tényezőnek szorzata. $2V$ első két (egyenlő) tényezője x növekedésével fogy (természetesen x, b és minden más hosszúságméret csak pozitív lehet), a harmadik pedig növekszik; így az utóbbinak alkalmas pozitív állandóval való szorzása útján elérhetjük, hogy a három tényező összege – és így számtani közepe is – állandó legyen. Ekkor pedig a szorzat – mint a három tényező mértani közepének köbe – azon x mellett maximális, amely mellett a harmadik tényező egyenlő az első kettővel, ezért a számtani és mértani közép egyenlők, a szorzat legnagyobb értéke pedig a számtani közép köbével egyenlő.

x együtthatója $2V$ csökkenő tényezőinek összegében $-2(2+\sqrt{2})$, a növekvő tényezőben 1, így az említett állandó szorzó: $2(2+\sqrt{2})$, és a

$$4(2+\sqrt{2})\,V=[b-(2+\sqrt{2})x]\cdot[b-(2+\sqrt{2})x]\,[2(2+\sqrt{2})x]$$

szorzat legnagyobb értékét adó dobozmagasságra

$$b-(2+\sqrt{2})x=2(2+\sqrt{2})x\text{-ből},$$
$$x=b/3(2+\sqrt{2})=(2-\sqrt{2})b/6\approx b\cdot 0{,}0976.$$

Így a három tényező közös értéke $2(2+\sqrt{2})x=2b/3$ és $4(2+\sqrt{2})V$ maximális értéke $8b^3/27$, V-é pedig $V_{\max}=2b^3/27(2+\sqrt{2})=(2-\sqrt{2})b^3/27\approx b^3\cdot 0{,}0217$.

Bárczy Zsolt (Hódmezővásárhely, Bethlen g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A tényezők közös $2b/3$ értéke a doboz alapháromszögének befogóját jelenti a maximumot adó dobozmagasság mellett; azt is mondhatjuk tehát, hogy a doboz keresett alapidoma a lemeznek (lineárisan) $2:3$ arányú kicsinyítettje.

2. A használt állandó szorzó fele: $2+\sqrt{2}$ a lemez kerületével, és ezen keresztül a lemezbe, ill. a doboz alapidomába beírható kör sugarával áll kapcsolatban, ugyanis $2s=b+b+\sqrt{2}b=(2+\sqrt{2})b$, továbbá $\varrho=t/s=2t/2s=b^2/(2+\sqrt{2})b=$ $=b/(2+\sqrt{2})$, és így a maximális térfogatot adó dobozmagasság $x=\varrho/3$. Valóban a lemez minden oldalán ugyanakkora x „felhajtás” azt is jelenti, hogy az alapidom mindhárom oldalát ugyanannyival vettük beljebb, ezért a doboz alapidomába írható kör középpontja egybeesik a lemezbe írható körével, sugara pedig azénál annak 1/3-ával kisebb, vagyis annak 2/3 része.

3. Többen differenciálszámítással határozták meg a szélső értéket. Ez még nem hiba, csak szükségtelen, „ágyúval lőni verebekre”. Az viszont már hiány, hogy az ezen eljárás alkalmazása mellett szükséges diszkussziót (hogy ti. a szélső értéket adó x beleesik-e az értelmezési tartományba, van-e igazán szélső érték, maximum-e az, vagy minimum) többben elmulasztották.

x, mint a gyakorlati méretezésben igen jól használható adat mellett többen az alapidom befogóját, átfogóját, beírt körének sugarát vették független változónak, adatnak pedig a lemez átfogóját, beírt körének sugarát; így közvetlenül kiadódik a tetszetős 1/3 arányszám.