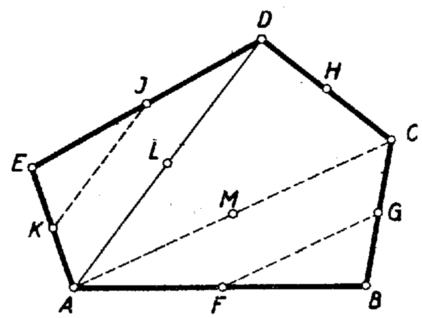
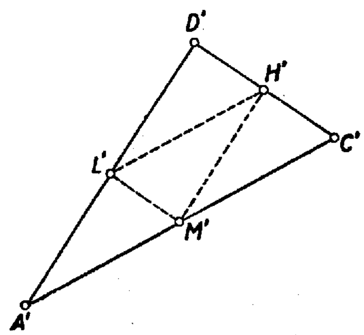
I. megoldás: Tekintsük a feladatot megoldottnak és legyen az $ABCDE$ ötszög egymásutáni AB, BC, CD, DE, EA oldalának felezőpontja rendre F, G, H, J, K. Gondoljunk előbb azokra az egyszerűbb esetekre, ha négy-, ill. háromszögre kapnánk a hasonló feladatot! Háromszöget egyértelműen meg lehet szerkeszteni oldalainak felezőpontjából: oldalegyeneseit egy-egy felezőponton át a másik kettő összekötésével párhuzamos egyenesek adják; négyszögekre nem áll ez, ezekre viszont azt tudjuk, hogy az oldalak felezőpontjai paralelogrammát határoznak meg. Ezek alapján kézenfekvő az ötszöget pl. az AD átlójával az $ABCD$ négyszögre és az ADE háromszögre bontani. Az előbbiben az F, G, H pontoknak az $FGHL$ paralelogrammává való kiegészítésével megkapjuk az AD oldal (ötszögátló) L felezőpontját, majd a J, K, L pontokból az ADE háromszög csúcsait és ezzel a keresett ötszög három egymás utáni csúcsát. Ezután a B és C csúcsokat vagy ugyanezen elv alapján kaphatjuk, pl. az AC átlóval való felbontásból kiindulva; vagy abból, hogy B az A-nak, C pedig D-nek tükörképe az F, ill. H felezőpontra vonatkozóan; vagy pl. B-t az AF egyenesnek az E-n át FK-val húzott párhuzamossal való metszéspontjaként.





Mindezen rész-szerkesztések egyértelműen hajthatók végre, így egynél több megoldás nem lehetséges. A megoldhatóságnak mindenekelőtt az egy feltétele, hogy a felezőpontok sorrendje is adott legyen. Hogy $FGHL$-ben valóságos paralelogrammát kapjunk, ehhez szükséges, hogy F, G, H – és általában bármely három egymásutáni felezőpont – ne essék egy egyenesbe; végül, hogy J, K, L-ből valóságos ADE háromszöget kapjunk, L nem eshet a JK egyenesre, általában bármely három egymásutáni felezőpontot (megfelelő körüljárással) paralelogrammává kiegészítő pont nem eshet a további két felezőpontot összekötő egyenesre. (Az utóbbi feltételnek ez az általánosabb fogalmazása – a fenti konkrét példa esetére biztosítja, hogy EA és ED nem megy át F, ill. H-n.)

Bakai Ilona (Makó, József A. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Hogy a megszerkesztett ötszög konvex legyen, ehhez $FGHJK$-nak konvex volta nem elegendő. Ha azonban még az is teljesül, hogy L a JK egyenesnek ugyanazon oldalára esik, mint az F, G, H ponthármas, és ez ismét a felezőpontoknak bármely ilyen típusú kettéválasztására áll, akkor az $AED\sphericalangle$, ill. az ötszög minden szöge kisebb 180°-nál.

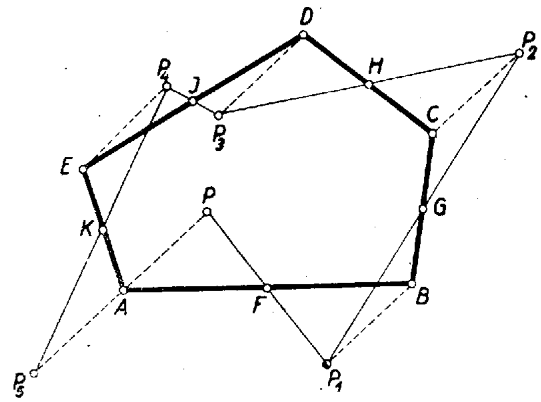
2. Valamennyi említett pont megszerkesztése tükrözésként is leírható: G-t tükröztük FH felezőpontjára: L, majd J-t, ill. K-t, ill. L-et, KL, JL, JK felezőpontjára: A, D, E, végül A-t, ill. D-t F, ill. H-ra: B, ill. C. Ellenőrzés: kell, hogy B és C tükrös pár legyen G-re.

II. megoldás: A fentiek után a szerkesztés előkészítéséül elegendő pl. az AC és AD átlók közti ACD háromszög megszerkesztése is. Evégett egy tetszőlegesen választott A' pontból kiindulva egy az ACD-vel egybevágó és megegyező állású (azaz párhuzamos oldalakkal bíró) $A'C'D'$ háromszöget szerkesztünk annak kihasználásával, hogy az A-ból C, ill. D felé mutató irányt, és általuk a CAD szöget megadja az F-ből G, ill. K-ból J felé mutató irány, az AC, ill. AD szakaszok pedig kétszeresei FG, ill. KJ-nek. Ezt a háromszöget a $C'D'$ oldal H' felezőpontját az adott H-ba vivő eltolás állítja a megfelelő helyre.

Rapcsák András (Debrecen, Fazekas M. gyak. g. I. o. t.)

Megjegyzés. 3. Vehettük volna $A'C'D'$ helyett a hozzá hasonló, feleakkora és párhuzamos, de ellentétes irányú oldalakkal bíró $H'L'M'$ háromszöget is; ennek ismeretében C, ill. D a $HL'M'C$, ill. $HM'L'D$ paralelogramma negyedik csúcsaként, azaz lényegében ismét eltolással kapható. Ennek az a speciális esete, ha H'-t H-ban választjuk, két az I. megoldásban szerepelt paralelogrammára vezet.

III. megoldás: A 2. megjegyzésbeli tükrözésekre és a befejező-ellenőrző lépésre gondolva adódik a következő megoldás. Ha egy tetszésszerinti P pontot egy adott felezőpontra tükrözünk, majd a P_1 tükörképét a következő felezőpontra s i. t., és az ötödik tükrözéssel visszajutunk P-be, akkor P és 4 tükörképe éppen a keresett ötszög csúcsait adják.



Milyen helyzetűek már most P_5 és P, ha ez utóbbit nem ilyen szerencsésen választottuk? A középpontos tükrözés távolságtartó és az irányokat ellentétesre fordító tulajdonsága folytán a „hibás” P és a „helyes” A pont által meghatározott PA szakasz, továbbá a P_1B, P_2C, P_3D, P_4E, P_5A szakaszok egyenlő hosszúak, és közülük mindegyik egymásutáni kettő ellentétes irányú. Eszerint a közös végpontú PA és P_5A egyenlők, ellentétes irányúak, más szóval A felezőpontja a PP_5 szakasznak. A többi csúcs ebből a fentiek szerint szerkeszthető.

Szűcs József (Szeged, Ságvári E. g. II. o. t.)

Megjegyzés. 4. A feladat a legutóbbi gondolatmenettel tetszés szerinti páratlan oldalszámú sokszög esetén megoldható. Egyúttal azt is látjuk, hogy páros oldalszámú sokszög nem szerkeszthető meg egyértelműen az oldalfelező pontok helyzetéből, ugyanis $2n$ számú adott pont csak bizonyos feltételek mellett alkothatja egy $2n$-szög oldalfelezőpontjainak rendszerét, ha viszont ezek teljesülnek, akkor bármely P-ből kiindulva az adott pontokon való $2n$ egymásutáni tükrözés után P_{2n} egybeesik P-vel.

Fritz József (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. I. o. t.)