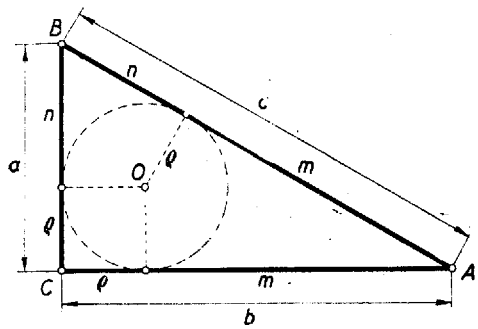
I. megoldás: A beírt körhöz a csúcsokból húzható érintőszakaszok egyenlősége és a háromszög derékszögű volta folytán a befogók és az átfogó hossza rendre (1. ábra):



1. ábra

(1) $$m+\varrho, \quad n+\varrho, \quad m+n,$$

így a keresett terület kétszerese a befogók szorzataként:

(2) $$2t=(m+\varrho)(n+\varrho)=mn+(m+n+\varrho)\,\varrho.$$

Innen ϱ-t ki kell küszöbölnünk. A területnek és ϱ-nak más, minden háromszögre érvényes összefüggése: $t=s\varrho$, ez viszont a kerület felét vonja be újabb ismeretlenként számításunkba. Ámde (1) alapján s is kifejezhető m, n, ϱ-val: $s=m+n+\varrho$, sőt (2) jobb oldalának második szorzatában éppen $s\varrho=t$-re ismerünk rá, így a kiküszöbölés egy csapásra sikerül. Ezt beírva rendezéssel a keresett területképlet $t=mn$.

Máté Zsolt (Szeged, Radnóti M. gyak. g. II. o. t.)

Megjegyzés. Az adatok és a kiküszöbölendő ϱ között (1) felhasználásával a Pythagoras-tétel is ad összefüggést: $(m+\varrho)^2+(n+\varrho)^2=(m+n)^2$-ből összevonással, felezéssel és kiemeléssel $(m+n+\varrho)\,\varrho=mn$, ezt (2)-be helyettesítve (vagy a bal oldalban $s\varrho=t$ felismerésével) $t=mn$.

Pósa Lajos (Bp. XIII., Sziget utcai ált. isk. V. o. t.)

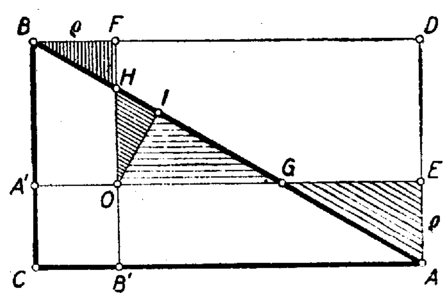
II. megoldás: Jusson eszünkbe, hogy a Heron-féle területképlet gyökjele alatti szorzat tényezői közül a három különbség a csúcsokból a beírt körhöz húzott érintőszakaszok hosszát jelenti, esetünkben $s-a=m$, $s-b=n$, $s-c=\varrho$. Ezeket a képletbe beírva, majd az $s\varrho$ szorzatban a terület egy másik kifejezésére ráismerve

$$t=\sqrt{s(s-c)(s-a)(s-b)}=\sqrt{s\varrho mn}=\sqrt{tmn},$$

és innen négyzetre emeléssel és osztással $t=mn$.

Török László (Ózd, József A. g. I. o. t.)

III. megoldás: A feladatot a területátalakítás módszerével is megoldhatjuk. Egészítsük ki az ABC derékszögű háromszöget a D csúccsal téglalappá, hosszabbítsuk meg a beírt kör OA', OB' érintési sugarait az AD, ill. BD oldalon levő E, ill. F metszésig, jelöljük $A'E$, ill. $B'F$-nek az AB átlóval való metszéspontját G, ill. H-val, és a körnek AB-n levő érintési pontját I-vel (2. ábra).



2. ábra

Ekkor – betűk együttesével a megfelelő területet jelölve –

$$ABC=BAD=BHF+FHGED+GAE=OHI+FHGED+GOI=FOED,$$

ugyanis a BHF és OHI, valamint GAE és GOI derékszögű háromszögek egybevágók, mert H-nál, ill. G-nél levő hegyes szögeik csúcsszögek, és a velük szemben fekvő befogók hossza a beírt kör sugarával egyenlő. Eszerint

$$t=FO\cdot OE=BA'\cdot B'A=BI\cdot IA=mn.$$

Mezey Ferenc (Bp. II., Rákóczi F. g. II. o. t.)