Egyenleteink a (3) kivételével x, y, z, u-ban szimmetrikusok, vagyis bennük mindegyik ismeretlen ugyanolyan szerepet játszik: (1)-ben mindegyik az 1-szeresével, (2)-ben mindegyik a négyzetének 1-szeresével szerepel tagként ugyanazon az oldalon, (4)-ben mindegyik az első hatványával tényezőként ugyanazon tagban. A (3)-ban viszont minden tag két különböző ismeretlen szorzata, de a lehetséges ilyen szorzatok közül xz és yu hiányzik, ez az egyenlet az x, z és y, u párokban szimmetrikus. Ezeknek az észrevételeknek a kihasználásával rendszerünk megoldását több szakaszra bonthatjuk.

(3)-ból és (1)-ből alkalmas zárójelbefoglalással:

$$(x+z)(y+u)=16, \tag{3a}$$

$$(x+z)+(y+u)=8. \tag{1a}$$

Ez az $x+z=\alpha$ és $y+u=\beta$ ismeretlenekre vonatkozóan a legegyszerűbb típusú másodfokú egyenletrendszer (adva van a szorzatuk és az összegük), így értékük a $\xi^2-8\xi+16=(\xi-4)^2=0$ egyenletből (ahol ξ akár α-t, akár β-t jelentheti) egyetlen megoldásként $\alpha=\beta=4$.

Másrészt (1) négyzetreemelésével a bal oldalon (2)-nek és (3) kétszeresének majdnem minden tagját megkapjuk, ugyanis

$$(x+y+z+u)^2=(x^2+y^2+z^2+u^2)+2[(xy+xu+zy+zu)+ +(xz+yu)], \tag{5}$$

innen az $xz=\gamma$ és $yu=\delta$ ismeretlenek összegére kapunk egyenletet, amelyeknek ismét ismerjük a szorzatát is (4)-ből. Az (1)–(3) figyelembevételével (5)-ből

$$64=20+32+2(xz+yu), \tag{5a}$$

ennélfogva a

$$\gamma+\delta=6 \quad \text{és} \tag{5b}$$

$$\gamma\delta=9 \tag{4a}$$

egyenletrendszerből az $\eta^2-6\eta+9=(\eta-3)^2=0$ egyenlet egyetlen megoldásaként $\gamma=\delta=3$.

Így megkaptuk mind az x, z, mind az y, u ismeretlenpárra vonatkozóan mind összegüket, mind szorzatukat, ezek harmadszor is „összeg és szorzat” típusú rendszert alkotnak. Sőt, mivel $\alpha=\beta$ és $\gamma=\delta$, azért a két egyenletrendszer egymástól csak az ismeretlenek jelölésében különbözik, x és z ugyanazon másodfokú egyenlet gyökei, mint y és u, éspedig a $\zeta^2-\alpha\zeta+\gamma=0$ vagyis a $\zeta^2-4\zeta+3=0$ egyenleté.

A megoldások:
$(A_1):\ x_1=1 \quad \text{és} \quad z_1=3, \qquad (A_2):\ x_2=3 \quad \text{és} \quad z_2=1;$
$(B_1):\ y_1=1 \quad \text{és} \quad u_1=3, \qquad (B_2):\ y_2=3 \quad \text{és} \quad u_2=1.$
Most már a teljes egyenletrendszer összes megoldásait úgy kapjuk, hogy A_1 és A_2-ből, valamint B_1 és B_2-ből mind a $2\cdot 2=4$ lehetséges párt felírjuk (l. a táblázatot).

	x	z	y	u
I.	1	3	1	3
II.	1	3	3	1
III.	3	1	1	3
IV.	3	1	3	1

Muszély György (Bp. VIII., Vörösmarty M. g. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Ha feltesszük, hogy a gyökök egész számok, akkor egyenletrendszerünknek fenti megoldásait az alábbi meggondolásokkal is meg*keres*hetjük. (2) folytán abszolút értékben egyik ismeretlen értéke sem lehet 4-nél nagyobb. (4) folytán egyik sem lehet páros (0 sem), továbbá kettőnek abszolút értéke 3, kettőé 1. Egyik sem lehet negatív, mert (4) folytán a negatívok száma csak páros lehet, de (1) folytán mind a négynek negatív volta nem jöhet szóba, és kettő sem lehet negatív, mert akkor előbbi megállapításunk szerint (1) bal oldala maximálisan (a két abszolút értékben 3-mal egyenlő ismeretlent pozitívnak, az abszolút értékben 1-gyel egyenlőket negatívnak véve) $3+3-1-1=4$ lenne. Eszerint az ismeretlenek értékei csak 1, 1, 3, 3 lehetnek valamely sorrendben, ezek (2)-nek is megfelelnek. E számoknak az x, y, z, u szerepre való elrendezése (3) alapján végezhető el. Hatféle lehetséges sorrendjük közül 1, 3, 1, 3 és 3, 1, 3, 1 (vigyázzunk a betűsorrendre!) nem felel meg.

Marót Ildikó (Bp. V., Veres Pálné lg. II. o. t.)

2. A fenti „keresés” természetesen nem tekinthető teljes értékű megoldásnak, egyrészt mert abból a gyakran hallható, de hibás felfogásból indul ki, hogy számokon csak a legjobban ismert számokat, a természetes számokat értjük (e tekintetben az sem számít, hogy (1)–(4) jobb oldalán egész számok állnak), másrészt a próbálkozás, még ha rendszeres is, nem mindig biztosít az összes gyökrendszerek előállításáról, mindig egy alkalomra szabott, nem általános érvényű.

A közölt megoldásban is van bizonyos fogás jellegű elem, a szimmetriák felismerése, ez azonban az ismeretleneknek egymás közti kapcsolatára vonatkozik, nem pedig az ismert számok pozitív egész voltára. A közölt módszerrel a 8, 20, 16, 9 számok helyén más, nem egész számokkal, sőt a, b, c, d-vel is meg tudnók oldani a rendszert, akkor persze ξ és η-ra vonatkozó egyenleteknek két-két gyökével kellene tovább haladnunk.