A feltevésben szereplő egyenlő értékű kifejezéseknek csak akkor van értelmük, ha a, x, y, z az 1-től különböző pozitív számok; ezt feltesszük. Megmutatjuk továbbá, hogy közös értékük nem lehet 0; ez ugyanis csak a számlálók háromtagúi miatt lenne lehetséges, márpedig az $y+z-x=x+z-y==x+y-z=0$ egyenletrendszerből egyértelműen a kizárt $x=y=z=0$ esetre jutnánk.

Most már a feltevés első két tagjának egyenlőségéből átrendezéssel:

$$x\frac{{}^{a}\log y}{{}^{a}\log x}=x\cdot\ {}^{x}\log y=\ {}^{x}\log y^{x}=\frac{y(x+z-y)}{y+z-x}. \tag{1}$$

Az adott egyenlő kifejezések egymásba mennek át, ha y és z-t felcseréljük, x-et változatlanul hagyjuk. Ez a belőlük folyó (1)-ra is érvényes, ennélfogva

$$^{x}\log z^{x}=\frac{z(x+y-z)}{y+z-x}. \tag{2}$$

(1) és (2) különbségét képezve a kapott logaritmus-egyenlőségből a megfelelő hatványok egyenlőségére következtethetünk:

$$^{x}\log y^{x}-\ {}^{x}\log z^{x}=\ {}^{x}\log\frac{y^{x}}{z^{x}}=\frac{y(x+z-y)-z(x+y-x)}{y+z-x}=z-y,$$

$$\frac{y^{x}}{z^{x}}=x^{z-y}=\frac{x^{z}}{x^{y}},$$

és innen

$$x^{y}y^{x}=x^{z}z^{x}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy $y^{z}z^{y}$ értéke ugyanennyi.

Molnár Emil (Győr, Révai M. g. I. o. t.)

Megjegyzés: A feladat egy más megoldásának vázlata található a Matem. Szakköri Feladatgyűjtemény c. középiskolai szakköri füzetben.[1]

[1] 2. kiadás (Tankönyvkiadó, 1955.) 102. fd. 76. o.