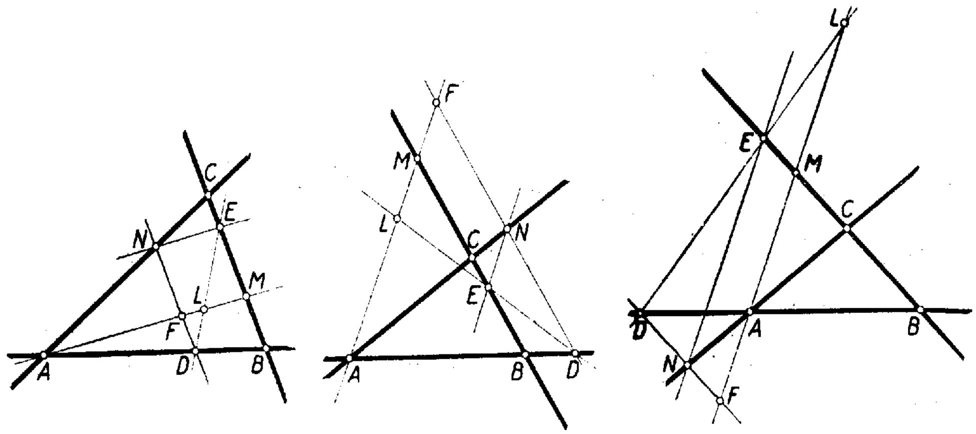
I. megoldás: Legyen AM és ND metszéspontja F. Ekkor a feladathoz fűzött megjegyzés folytán – a szakaszok irányítását is figyelembe véve – az F-nek akár az AL szakaszon, akár azon kívüli helyzete esetén $AL = AF + FL$, így a vizsgálandó osztóviszony:

$$\frac{AL}{LM} = \frac{AF}{LM} + \frac{FL}{LM}. \tag{1}$$

A jobb oldal második tagjában álló osztóviszonyt – amelynek szokásos rövid jele: (FML)[1] – DN és BC párhuzamosságának felhasználásával előbb a vele egyenlő (DEL), majd hasonlóan $NE \parallel AM$ alapján a (DNF), végül ismét $DN \parallel BC$ alapján a (BCM) osztóviszonnyal helyettesíthetjük, ennek értéke pedig adatként használható:

$$(FML) = \frac{FL}{LM} = \frac{DL}{LE} = \frac{DF}{FN} = \frac{BM}{MC} = (BCM) = m \tag{2}$$

(bármelyik két egymás utáni ponthármas első, második, harmadik pontjai egymásnak megfelelői).



Az első tagbeli hányados számlálójának és nevezőjének FM-mel való szorzása után az $(AMF) = (ACN) = n$ osztóviszony (ismét $DN \parallel BC$ alapján) és az FM/LM hányados szorzatával egyenlő, és itt az utóbbi tényező $FM = FL + LM$, valamint (2) alapján $m+1$-gyel egyenlő:

$$\frac{AF}{LM} = \frac{AF}{FM}\cdot\frac{FM}{LM} = \frac{AN}{NC}\cdot\frac{FL+LM}{LM} = n\left(\frac{FL}{LM}+1\right) = n(m+1). \tag{3}$$

Most már (1)–(3) szerint valóban áll a bizonyítandó egyenlőség:

$$\frac{AL}{LM} = n(m+1) + m = mn + m + n.$$

Müller Miksa (Makó, József A. g. II. o. t.)

II. megoldás: A bizonyítandó egyenlőség jobb oldalán az $(m+1)(n+1)$ szorzat három tagját felismerve adjuk hozzá mindkét oldalhoz a hiányzó negyediket, az 1-et és igyekezzünk az $\dfrac{AL}{LM}+1 = \dfrac{AL+LM}{LM} = \dfrac{AM}{LM}$ hányadost az $m+1 = \dfrac{BM}{MC}+1 = \dfrac{BC}{MC}$ és $n+1 = \dfrac{AN}{NC}+1 = \dfrac{AC}{NC}$ hányadosok szorzataként előállítani. (Ezek egyébként az $\dfrac{AM}{LM} = -\dfrac{AM}{ML}$, $\dfrac{BC}{MC} = -\dfrac{BC}{CM}$ és $\dfrac{AC}{NC} = -\dfrac{AC}{CN}$ átalakítások szerint ugyancsak tekinthetők osztóviszonyoknak, csupán az a szokatlan, hogy így $-(ALM)$, $-(BMC)$ és $-(ANC)$-ben a „későbben létrejött” L, ill. M, ill. N pont szerepel *alap*pontként.) Valóban, az I. megoldásban használt vagy azokhoz hasonló átalakításokkal:

$$\frac{AM}{LM} = \frac{AF+FM}{LM} = \frac{\dfrac{AF}{FM}+1}{\dfrac{LM}{FM}} = \frac{\dfrac{AN}{NC}+1}{\dfrac{LM}{FL+LM}} =$$

$$= (n+1)\cdot\frac{FL+LM}{LM} = (n+1)\left(\frac{FL}{LM}+1\right) = (n+1)(m+1).$$

Ezzel bizonyításunkat befejeztük.

Megjegyzések. 1. Mindkét megoldásban kissé felületesen jártunk el, nem voltunk tekintettel arra, hogy mindazok a hányadosok, pontok, amelyekről beszéltünk, M és N-nek bármely felvétele esetén *léteznek-e*, egyértelműen meg

[1] Lásd pl. *Kárteszi Ferenc:* A Menelaos- és a Ceva-féle tétel. KML. XI. kötet 67–75. o., 1955. november.

vannak-e határozva, továbbá hogy az alkalmazott átalakításokat szabad-e mindig végrehajtani. Most pótoljuk ezeket a hiányokat.

Igen egyszerű annak biztosítása, hogy az adott m és n osztóviszonyoknak (az osztásoknak) legyen értelmük: nem lehet $MC = NC = 0$, azaz M és N-et nem választhatjuk C-ben. Már hosszabb meggondolást igénylő kérdés, hogy a több lépéssel előálló L pont határozott-e. Ez csak akkor nem állna, ha az AM és DE egyenesek egybeesnének vagy párhuzamosak lennének.

Egybeesésük akkor és csak akkor következnék be, ha AB-vel való A, ill. D közös pontjuk is, és BC-vel való M, ill. E közös pontjuk is egybeesne. Már most D értelmezésénél fogva $D \equiv A$ akkor és csak akkor áll be, ha $N \equiv A$; ilyenkor E értelmezésénél fogva $E \equiv M$ is bekövetkezik, ennélfogva a $N \equiv A$, másképpen a $n = 0$ esetet ugyancsak ki kell zárnunk. Fordítva, $E \equiv M$-ből ugyancsak következik $N \equiv A$; így ugyanis a NE és AM párhuzamosok egybeesnek, ennélfogva az AC-vel való egyetlen közös pontjuk: N, ill. A is egybeesnek (AM-nek AC-vel nem lehet egynél több közös pontja, mert BC-t az egymástól különböző M, ill. C pontban metszik.) Más szóval az $N \equiv A$ egybeesésnek szükséges és elegendő feltétele az $E \equiv M$ egybeesés.

DE-nek AM-mel való párhuzamossága pedig E értelmezése révén azt jelentené, hogy DE egybeesik NE-vel, ennélfogva vagy $D \equiv N$ (ekkor egybeesnek A-val, ezt az esetet már kizártuk), vagy $DN \parallel AM$. Ámde értelmezésnél fogva $DN \parallel BC$, ennélfogva ekkor $AM \parallel BC$, ami ellentétben áll M értelmezésével. Eszerint itt további esetet nem kell kizárnunk.

Hogy a vizsgálandó $AL \parallel LM$ osztóviszonynak legyen értelme, nem vehetjük fel M, N-et úgy, hogy a megszerkesztett L egybeessék M-mel. Erre csak az $E \equiv M$ egybeesés vezethetne, ezt már kizártuk.

Utolsó ilyen kérdésünk: szabad volt-e FM-mel hányadost „bővíteni, ill. egyszerűsíteni", nem áll-e fenn az $FM = 0$ „veszélye"? – Nem, mert F és M az egymással párhuzamos és $N \not\equiv C$ folytán egymástól különböző ND, ill. BC egyenes egy–egy pontja.

Ezek szerint a bebizonyított egyenlőség érvényes, ha M nem esik C-be és N nem esik sem C-be, sem A-ba.

2. Könnyű belátni, hagy az ezek után ugyancsak „veszélyesnek" gondolható $M \equiv B$ egybeesést nem kell kizárni. Ezzel N-nek bármely megengedett helyzetében $L \equiv D$ és egyenlőségünk bal oldala

$$\frac{AL}{LM} = \frac{AD}{DB} = \frac{AN}{NB} = n$$

és ez egyezik a jobb oldalnak $m = 0$-val adódó értékével.

3. Ábráink csupán M és N felvételében különböznek, tulajdonképpen egy is elég volna, vagy még egyre sincs szükség. A szakaszok irányítása nem nehezítette, hanem éppen könnyítette, egységessé tette a sokféle lehetőség vizsgálatát. Mégis ajánljuk olvasóinknak, hogy még több ábrán kövessék az adott gondolatmenetet. M és N mindegyike számára már ez is három lehetőség: az oldal szakaszon (itt m, $n > 0$), vagy a meghosszabbítások valamelyikén (itt $-1 < m$, $n < 0$, ill. m, $n < -1$); további finomítás: az oldalszakasz felezőpontjában, ill. első vagy második felében (m, $n = 1$, ill. < 1, ill. > 1).