Mondjuk ki mindenekelőtt, hogy egyenletrendszerünk megoldásaiban egyik ismeretlen értéke sem lehet negatív, hiszen x, y és z mindegyike két nemnegatív négyzetgyök összege, továbbá, hogy a, b, c-ről az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy pozitívok, hiszen a rendszerben csak négyzetük lép fel. Vegyük észre, hogy (2) és (3) úgy adódnak (1), ill. (2)-ből, hogy x, y, z helyére y, z, x-et írunk, egyszersmind a, ill. b helyére b, ill. c-t.

(1)-ben az első gyökös kifejezést a bal oldalra átvive és mind a két oldalt négyzetre emelve az egyenletben csak egy gyökös kifejezés szerepel:

$$x^2-2x\sqrt{y^2-a^2}+y^2=z^2.$$

Innen a gyökös tag újbóli különválasztásával, újabb négyzetreemeléssel gyökmentes egyenletet nyerünk, amelyből rendezéssel:

$$\left(x^2+y^2-z^2\right)^2=4x^2(y^2-a^2),$$

$$4a^2x^2=2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2-x^4-y^4-z^4=U. \tag{4}$$

x, y, z helyére y, z, x-et írva a jobb oldali U kifejezés önmagába megy át, ennélfogva a (2) és (3)-ból hasonló eljárással képezhető egyenletek röviden így írhatók:

$$4b^2y^2=U, \tag{5}$$

$$4c^2z^2=U. \tag{6}$$

Ezek szerint (4), (5) és (6) bal oldalai is egyenlők; az ebből adódó

$$y^2=\frac{a^2}{b^2}x^2 \qquad \text{és} \tag{7}$$

$$z^2=\frac{a^2}{c^2}x^2 \tag{8}$$

kifejezéseket (4)-be helyettesítve egyismeretlenes, csak x^2-es és x^4-es tagot tartalmazó egyenletet kapunk, végül abból $a^4\neq 0$-val való osztással és kiemeléssel:

$$x^2\left[\left(\frac{2}{a^2b^2}+\frac{2}{b^2c^2}+\frac{2}{c^2a^2}-\frac{1}{a^4}-\frac{1}{b^4}-\frac{1}{c^4}\right)x^2-\frac{4}{a^2}\right]=0. \tag{9}$$

Négyzetreemeléseinkkel mindig következményére, de nem ekvivalens következményére tértünk át az éppen előttünk volt egyenletnek; így eredeti egyenletrendszerünk bármely megoldásában x csak a (9)-et kielégítő érték lehet, viszont (9) gyökei nem feltétlenül tartoznak bele, rendszerünk valamely megoldásába.

Mindjárt a kétszeres $x=0$ gyökét is el kell vetnünk (9)-nek, mert ebből (7) és (8) folytán $y=z=0$, így pedig (1)–(3) gyökjelei alatt negatív számok állnak. (9)-nek szögletes zárójelben levő tényezőjéből is csak a pozitív gyököt vehetjük figyelembe, így a negyedfokú egyenletnek számunkra legfeljebb egy gyöke jöhet szóba:

$$x=\frac{2}{\left(\frac{2}{a^2b^2}+\frac{2}{b^2c^2}+\frac{2}{c^2a^2}-\frac{1}{a^4}-\frac{1}{b^4}-\frac{1}{c^4}\right)^{1/2}}\cdot\frac{1}{a}.$$

Az első nevezőbeli kifejezést $\frac{1}{T}$-vel jelölve (7) és(8)alapján, vagy az eddigihez hasonló önálló eljárással azt kapjuk, hogy rendszerünk megoldása csak a következő lehet:

$$x=\frac{2T}{a},\qquad y=\frac{2T}{b},\qquad z=\frac{2T}{c}. \tag{10}$$

A valós számokban való megoldhatóságnak szükséges feltétele, hogy az 1/2 kitevőjű hatvány alapja pozitív legyen:

$$\frac{1}{T^2}=\frac{2}{a^2b^2}+\frac{2}{b^2c^2}+\frac{2}{c^2a^2}-\frac{1}{a^4}-\frac{1}{b^4}-\frac{1}{c^4}>0; \tag{11}$$

ha ez teljesül, akkor x, y, z mindegyikére egyetlen pozitív értéket kapunk. Hogy ezek az eredeti rendszert kielégítik-e, ennek behelyettesítéssel való ellenőrzése bonyolult számítás lenne.

Ezt megkerülhetjük avval, hogy feladatunknak geometriai jelentést tulajdonítunk, egyenleteink valamennyi tagját egy–egy szakasznak tekintjük. Tegyük fel, hogy a (10) számhármas megoldása rendszerünknek. Ekkor (1)-nek két, a Pythagoras–tételre emlékeztető gyökös kifejezése annak a két derékszögű háromszögnek „második” befogóját jelenti, amelyek mindegyikének „első” befogója az ismert a szakasz, átfogóik pedig az y, ill. z ismeretlenek. Mármost x, mint a második befogók összege, úgy kaphat jelentést, ha a két háromszöget a befogóikkal úgy toljuk össze, hogy a második befogók egymás meghosszabbításába essenek, éspedig ekkor x a két derékszögű háromszög által lefedett egyetlen háromszögnek „harmadik” oldala (az első kettő y és z), a pedig az x alaphoz tartozó magassága. Ebben a háromszögben az x oldal két végpontjában a két derékszögű háromszögnek egy–egy hegyes szöge fekszik, vagy pedig egyik végpontjában derékszöge, ha ti. $y = a$ vagy $z = a$, amikor a megfelelő derékszögű háromszög egyenesszakasszá fajul el; mindkét derékszögű háromszög azonban nem fajulhat el, mert különben a már kizárt $x = y = z = 0$ esetre jutnánk. – Ugyancsak az x, y, z oldalakkal képezett háromszögre vezetnek (2) és (3) is azzal a további megállapítással, hogy az y, ill. z oldalhoz tartozó magasság b, ill. c. Ezek szerint x, y, z csak annak a nem tompaszögű háromszögnek az oldal–mértékszámai lehetnek, amelyben a magasságszakaszok hossza a, b, c.

Hogy létezik-e ez a háromszög, és ha igen, akkor nem tompaszögű-e, erre a kérdésre a t terület legrégebben ismert képleteinek felhasználásával válaszolhatunk, amelyben az oldalak és a megfelelő magasságok együtt szerepelnek. Minthogy

$$2t = xa = yb = zc,$$

azért

$$x = 2t \cdot \frac{1}{a}, \qquad y = 2t \cdot \frac{1}{b}, \qquad z = 2t \cdot \frac{1}{c}, \tag{12}$$

vagyis az x, y, z oldal–mértékszámok ***arányosak*** a megfelelő magasságok reciprok értékével, ennélfogva az x, y, z oldalakkal meghatározott háromszög ***hasonló*** ahhoz, amelyet az $1/a$, $1/b$, $1/c$ hosszúságú szakaszok határoznak meg, így pedig a kérdéses (az előbbi) háromszög akkor és csak akkor létezik, ill. akkor és csak akkor nem tompaszögű, amikor az utóbbi.

Hogy a magasság–mértékszámok reciprok értékével mint szakaszokkal lehessen háromszöget szerkeszteni, ehhez szükséges és elegendő, hogy teljesüljenek a „háromszög–egyenlőtlenségek”:

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \qquad \frac{1}{b} < \frac{1}{c} + \frac{1}{a}, \qquad \frac{1}{c} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}; \tag{13}$$

ahhoz pedig, hogy ez a háromszög ne legyen tompaszögű, szükséges és elegendő, hogy teljesüljenek azok az egyenlőtlenségek, amelyek a koszinusz–tétel révén biztosítják a szögek koszínuszának, ill. a $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ kifejezések számlálójának nemnegatív voltát:

$$\frac{1}{a^2} \le \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}, \qquad \frac{1}{b^2} \le \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}, \qquad \frac{1}{c^2} \le \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}. \tag{14}$$

Ámde – pozitív a, b, c esetén – a (14) egyenlőtlenségek teljesülése esetén a megfelelő (13) alatti is teljesül; ugyanis pl.

$$\frac{1}{a^2} \le \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} < \frac{1}{b^2} + \frac{2}{bc} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2,$$

és ebből

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

eszerint mondhatjuk, hogy rendszerünk megoldhatóságának szükséges és elegendő feltételét a (14) egyenlőtlenségek fejezik ki.

Megjegyzések. A (10) és (12) kifejezések összehasonlításából adódik, hogy $T = t$, eszerint egy háromszög területe a magasságokból a (11) képlettel számítható. Több dolgozat is felhasználta azt a szerkezeti hasonlóságot, amely T és a Heron–képletnek a kizárólag az oldalakat tartalmazó

$$16t^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4$$

alakja között fennáll (itt a, b, c, szokás szerint, az oldalakat jelenti). Így – mint többen megállapították – a (11) követelés azt fejezi ki, hogy $1/a$, $1/b$, $1/c$-ből mint oldalakból lehessen háromszöget szerkeszteni. Ez azonban a megoldhatóságnak csupán szükséges, de nem elegendő feltétele. A dolgozatok figyelmen kívül hagyták, hogy a négyzetgyökös kifejezések értéke nem lehet negatív, nem vizsgálták a háromszög „tompaszögmentességének” feltételét.