Hogy egyenletünknek legyenek *határozott* gyökei, fel kell tennünk, hogy $p \neq 0$; különben ugyanis a $0x^2+0x+0=0$ azonossággal állnánk szemben – amelyet minden szám kielégít –, és így kérdésünknek nem volna értelme. Másrészt, hogy a gyökök *valósak* legyenek, fel kell tennünk, hogy a p-vel egyszerűsített

$$x^2+(p+1)x-(3p-2)=0 \tag{1}$$

egyenlet diszkriminánsa nem negatív:

$$0 \leq (p+1)^2+4(3p-2)=p^2+14p-7=(p+7)^2-56, \tag{2}$$

azaz, hogy vagy

$$p \leq -7-\sqrt{56} \approx -14{,}48 \quad \text{vagy} \quad p \geq -7+\sqrt{56} \approx 0{,}48. \tag{2a}$$

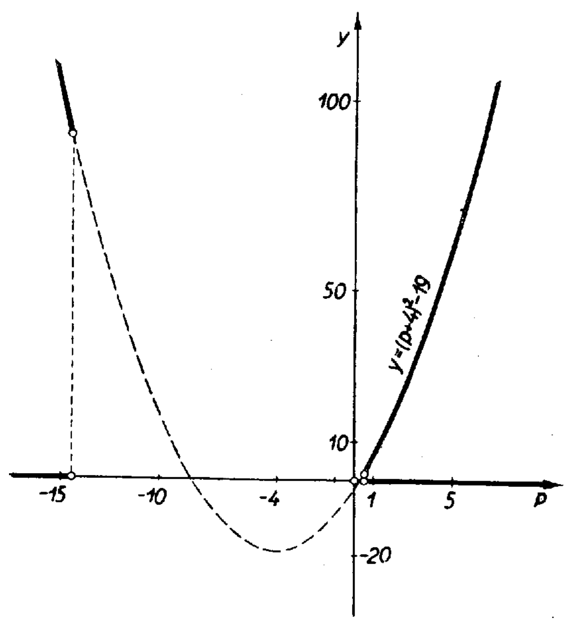
A gyökök vizsgálandó y négyzetösszege kifejezhető összegükkel és szorzatukkal, ill. az (1)-beli együtthatók révén p-vel:

$$\begin{aligned} y=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(p+1)^2+2(3p-2)= \\ =p^2+8p-3=(p+4)^2-19. \end{aligned} \tag{3}$$

ennélfogva y-nak mint p függvényének minimumát kell keresnünk a (2a)-val meghatározott értelmezési tartományon.

(2a)-t nem tekintve y legkisebb értéke $p=-4$ mellett -19, amikor ti. (3)-ban $(p+4)^2$ értéke a legkisebb, azaz 0. Azonban $p=-4$-et (2a) kizárja, és valóban az $y=-19$ érték is lehetetlen, hiszen négyzetek összege nem lehet negatív.

Hogy y értelmezési tartományának korlátozottságát figyelembe vehessük, tekintsük (3) grafikonját, töröljük belőle a (2a) révén kizárt ívet és a visszamaradt grafikonon keressük meg a „legalacsonyabb” pontot.



A teljes grafikon parabola, a $(-4,\ -19)$ pontbeli csúcsig süllyedő és onnan emelkedő ágakkal. Láttuk már, hogy a csúcs beleesik a törlendő ívbe, és mivel az értelmezési tartomány (2a)-ban megállapított végpontjai különböznek $p=-4$-től, azért mindkét ág „aljáról” törlünk egy-egy részt. Ezek után a keresett legkisebb értéket a visszamaradó két rész-ág végpontjainak ordinátái közül már közvetlen összehasonlítással kiválaszthatjuk:

$$p=-7\mp\sqrt{56} \text{ mellett } y=(-3\mp\sqrt{56})^2-19=46\pm 12\sqrt{14}\approx \begin{cases} 90,90 \\ 1,10, \end{cases}$$

eszerint a keresett legkisebb érték $y=46-12\sqrt{14}\approx 1{,}10$ és ezt $p=-7+2\sqrt{14}\approx \approx 0{,}48$-nál veszi fel y. Ekkor a diszkrimináns 0, a gyökök: $x_1=x_2=-\dfrac{p+1}{2}==3-\sqrt{14}\approx -0{,}7417$ és $y=2x_1^2\approx 2\cdot 0{,}550=1{,}100$.

Parti Enikő (Bp. XX., Bagi Ilona lg. II. o. t.)