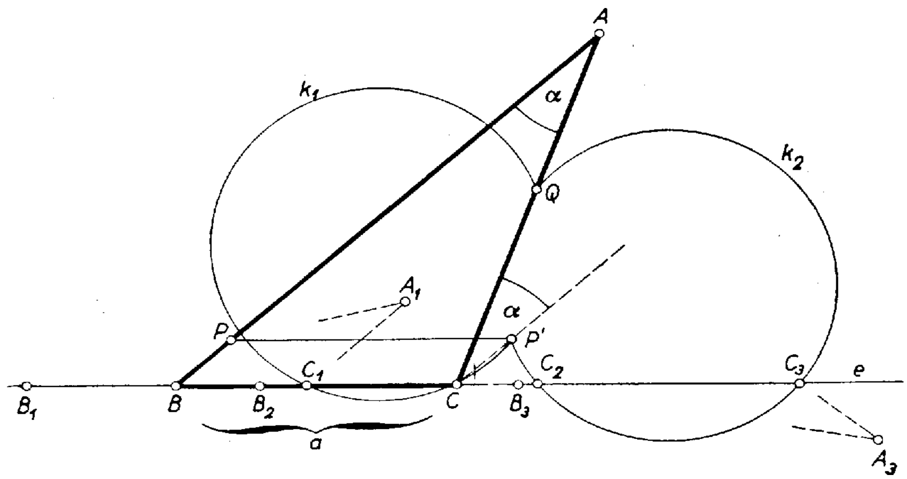


1. ábra

I. megoldás: Legyenek az adott egyenes és a pontok e, P, Q. Ezek a keresett ABC háromszöggel szemben négy elhelyezési követelményt támasztanak: B és C-nek e-re, AB és AC-nek P, ill. Q-ra kell illeszkednie. Ezek a követelmények egyrészt pótolják azt a hiányt, hogy a szükséges három (független) alkotórésszel szemben itt csak kettő van előírva, másrészt a háromszög helyzetét is meghatározzák.

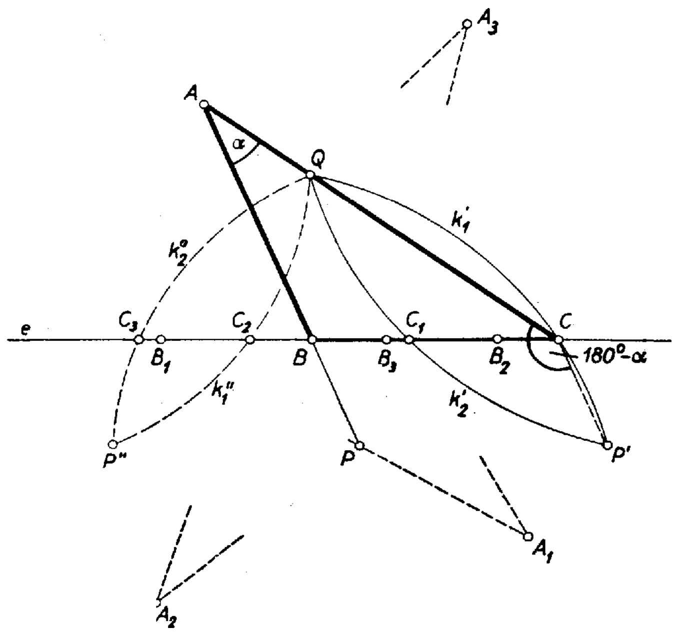
Tegyük fel egyelőre, hogy P és Q az e-nek ugyanazon partján van. Képzeljük a feladatot megoldottnak, és legyen egy a követelményeknek megfelelő háromszög ABC, amelyben $BC=a$, $BAC\sphericalangle=\alpha$ (1. ábra). Hogy a méret- és helyzetkövetelményeket kapcsolatba hozzuk, toljuk el a BC szakasz B végpontját P-be, és legyen ekkor C új helyzete P', vagyis $PP'\parallel e$ és $PP'=a$. A $PBCP'$ négyszög paralelogramma, ezért $CP'\parallel BP$, és így az AB és AC, másképpen a BP és CQ egyenesek közti a szög C-ben is előállt CP' és CQ között. Ennélfogva a $P'Q$ szakaszt C-ből α szög alatt látjuk.

Ezek alapján a szerkesztés a következő: a P-n át e-vel párhuzamosan húzott e_1-re P-től felmérjük az a szakaszt, és megszerkesztjük azt a k_1, k_2 köriv-párt, amelynek pontjaiból $P'Q$ látószöge α. k_1, k_2-nek minden az e-vel közös pontja egy megoldást ad C-re, ebből a $CP'PB$ paralelogramma negyedik csúcsaként kapjuk meg B-t, végül CQ és BP metszéspontjaként A-t.

Valóban, így AB és AC átmegy P-n, ill. Q-n, $BC=PP'=a$, és $BAC\sphericalangle=\alpha$, mert $AB\parallel CP$, és így $BAC\sphericalangle=P'CQ\sphericalangle=\alpha$, mert váltószögek.

Az 1. ábrán a k_1, k_2 ívpárnak e-vel 4 közös pontja van: C, C_1, C_2, C_3. Az utóbbi kettő az e-nek P, Q-val ellentett partján fekvő ABC háromszöget ad: [1]. P-n és Q-n e háromszögek megfelelő oldalszakasza nem megy át, csak az oldalegyenes. Hasonlóan a C_1-gyel adódó $A_1B_1C_1$ háromszögnek A_1B_1 oldala átmegy P-n, A_1C_1-nek viszont csak a meghosszabbítása megy át Q-n. Csak ilyen megoldás várható akkor is, ha P és Q az e-nek ellentétes partjain feküsznek.

Hogy $A_3B_3C_3$ (és hasonlóan $A_2B_2C_2$) is megfelelő megoldás, ennek bizonyítása csak a szögek közti egyenlőség indokolásában tér el a fentitől: ezek most egyállású szögek.



[1]Az ábra eddigi részleteinek áttekinthetősége érdekében az $A_3B_3C_3$ háromszögnek A_3-ba befutó oldalai csonkán vannak feltüntetve, ugyanígy A_1-nél is ; a távol eső A_2-t pedig nem tüntettük fel.

2. ábra

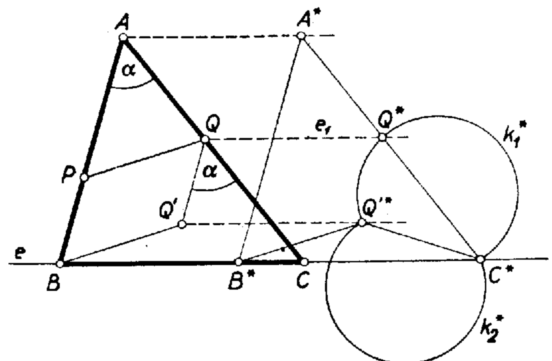
Megvizsgáljuk azt a helyzetet is, ha e szétválasztja a P, Q pontokat (2. ábra). Előbbi elemzésünk csak annyiban módosul, hogy $P'Q$-t C-ből nem α, hanem $180° - \alpha$ szög alatt látjuk, a szerkesztésben k_1, k_2-n az ennek megfelelő látószög-körívpár értendő. Az így szerkesztett ABC háromszögekben a CP' és CQ félegyenesek egyike megegyező, másika ellentett irányú az AB, ill. AC félegyenessel, ennélfogva $BAC\sphericalangle = 180° - P'CQ\sphericalangle = \alpha$.

A k_1, k_2 körív-pár és e közös pontjainak száma legfeljebb 4. Másrészt P' szerkesztésére, P-nek a-val való eltolására e irányában, két lehetőség van (a 2. ábrán P'', a P''-ből előállított B_3C_3 szakasz betűzési iránya ezért ellentett BC-ével), így a megoldások száma legfeljebb 8. (De lehet, hogy egy megoldás sincs.) Ha e szétválasztja P-t és Q-t, akkor a P' és P''-höz tartozó ívpárok mindegyikének pontosan egy pontja van e-n, ilyenkor a megoldások száma pontosan 4.

Ha P' egybeesik Q-val, akkor a fenti eljárás nem használható, a körívek ponttá zsugorodnak össze. Ilyenkor csak a P' révén adódó megoldásokról lehet szó.

Ha a pontok egyike, pl. P az e-n van, akkor ez a B csúcs, a P' megadja C-t, Q-t pedig CQ-ból a vele α szöget bezáró két iránnyal B-n át húzott párhuzamosok metszhetik ki; azonban megvizsgálandó, hogy az A-nál létrejött – belső és külső – szögek közül valóban a belső egyenlő-e α-val. – Ha végül P és Q mindegyike e-n van, akkor $PQ = a$ esetén végtelen sok megoldás van, $PQ \neq a$ esetén pedig nincs megoldás.

Megjegyzések. 1. A helyzeti és méretadatokat néhány dolgozat a PQ szakasznak BQ'-be való eltolása útján hozta kapcsolatba (3. ábra).



3. ábra

3. ábra

Ekkor CQ'-t Q-ból α, ill. $180° - \alpha$ szögben látjuk. Bár így az adott helyzetű szakaszt ismeretlen helyzetbe toltuk át, némi többletmunkával megoldáshoz juthatunk a fentivel lényegében azonos gondolatmenettel. Ugyanis e-nek tetszés szerinti B^* pontjából, mint B-nek eltolt megfelelőjéből kiindulva megszerkeszthetjük ábránknak egy az e mentén eltolt megfelelőjét, majd ezt a „csillagos" alakzatot Q^*-nál fogva Q-ba „visszatolva" megkapjuk a megoldást. Az ábrán e_1, C, Q' alkalmas középpontra nézve tükrös párja az előbbi e, Q, P'-nek.

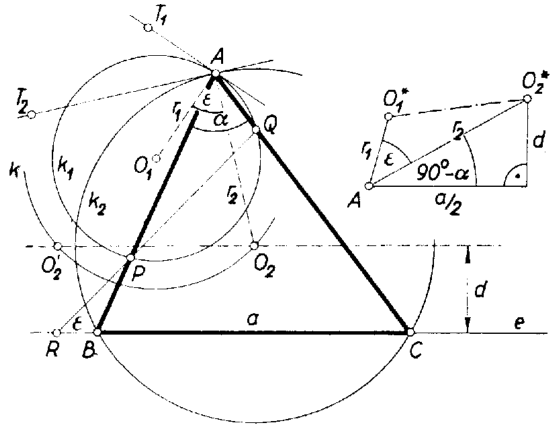
2. Az 1. ábrán vázolt három megoldás nem egybevágó; a helyzetkövetelmények e tekintetben természetesen nem pótolják a hiányzó méret-adatot.

3. A legtöbb dolgozat szerint a megoldások száma legfeljebb 2, ritkán 4. A hiány persze nem azon múlik, hogy az adott pontpár minden ábrában e-nek ugyanegy oldalán van – bár a másik lehetőséget csak szórványosan említik –, hiszen ilyenkor csak 4 megoldás van. Hanem azon, hogy legtöbben a k_1, k_2 ívekből és P' két lehetséges helyzetéből csak egyet-egyet vesznek figyelembe. – Egy dolgozat szerint P és Q közül az „e-hez közelebbin" át húzott párhuzamosra a „másik pont felé" mérjük fel a-t. Egy másik C-t Q-ba tolva „az előbbi megoldás szimmetrikusát" kapja. Néhányan kizárják a $PQ \parallel e$ és a $PQ \perp e$ lehetőségeket, ami hiba ugyan, mégis némi körültekintésre mutat. Van, aki szerint $a < PQ$ esetén nincs megoldás.

Mindezek (és más hibák) szerint igen elterjedt az a többnyire nem is tudatos felfogás, hogy egy ábráról mindent le lehet olvasni. Persze az a felfogás is lehet túlzás, hogy több ábrát rajzoljunk, mert egyetlen ábra néha inkább félrevezet, mint tájékoztat. Olyankor azonban mindenesetre célszerű több különböző felvételből kiindulva végigjárni a meggondolást, ha – mint itt is – nemcsak alakról van szó, hanem helyzetről is.

Az alábbiakban – helyszűke miatt – egy más megoldás alapgondolatát mi is egyetlen ábrához kapcsolódva vázoljuk, ezt azonban tudatosan tesszük, és az összes megoldások megkeresését, valamint a diszkussziót az olvasóra bízzuk.

II. megoldás (vázlat): Keressük A helyzetét a mértani helyek módszerével. Az A csúcs azon két (teljes) kör egyikén van, amelynek pontjaiból PQ-t α, vagy $180° - \alpha$ szög alatt látjuk (α a látószög egyrészt olyankor, ha A a BP és CQ félegyenesek mindegyikén rajta van, másrészt olyankor, ha A egyiken sincs rajta ; különben $180° - \alpha$ a látószög). Az egyik ilyen k_1 kör sugara legyen r_1, középpontja a 4. ábrán O_1. — Tekintsük másrészt az ABC háromszög k_2 körülírt körét, ennek középpontja O_2; k_2-nek r_2 sugarát és O_2-nek e-től mért d távolságát a és α-ból megszerkeszthetjük.



4. ábra

k_2 helyzetének megállapítása céljára megmutatjuk, hogy az AO_1 és AO_2 sugarak ϵ szöge egyenlő az e és PQ egyenesek R közös pontjánál keletkező szögek egyikével. Legyen T_1 a k_1-hez A-ban húzott érintőnek egy olyan pontja, amely AP-nek a Q-val ellentett partján van, és T_2 a k_2-höz A-ban húzott érintőnek Q-tól AB által elválasztott pontja. Ekkor $T_1AP\sphericalangle = AQP\sphericalangle = QCR\sphericalangle + QRC\sphericalangle$, $T_2AP\sphericalangle = T_2AB\sphericalangle = ABC\sphericalangle = QCR\sphericalangle$, ezekkel valóban $\epsilon = O_1AO_2\sphericalangle = T_1AT_2\sphericalangle = T_1AP\sphericalangle - T_2AP\sphericalangle = QRC\sphericalangle$.

Most már r_1, r_2, és ϵ-ból megszerkeszthetjük az O_1AO_2 háromszög alakját. Az így megkapott O_1O_2-vel O_1 körül k kört írva egy mértani helyet kapunk O_2-re, egy másik ilyet pedig az e-től d távolságban húzott párhuzamos ad. O_2 ismeretében elhelyezhetjük k_2-t, ennek k_1-gyel közös pontjaként megkapjuk A-t, majd AP és AQ révén B és C-t.