

A kívánt egyenlet felállításáról csak akkor lehet szó, ha  $y_1$  és  $y_2$  mindegyike szám, vagyis nevezőjük nem 0, más szóval ha  $x_1$  és  $x_2$  különbözik 1-től; feltesszük ezért, hogy  $x = 1$  nem elégíti ki az adott egyenletet, azaz fennáll:  $1 + p + q \neq 0$ . A keresett egyenlet együtthatóit lényegében  $y_1$  és  $y_2$  összege illetőleg szorzata adja meg. Mivel a két gyök  $x_1$  és  $x_2$  felcserélésével egymásba megy át, remélhető, hogy ezek a kifejezések közvetlenül átalakíthatók  $x_1 + x_2$  és  $x_1x_2$  kifejezésévé, és így felírhatók  $p$  és  $q$ -val a gyökképlet alkalmazása nélkül. (Egyébként a feladat – kimondatlanul – nyilván ezt kívánja.) A gyökök és együtthatók közti összefüggés szerint, ha a keresett egyenletet  $ay^2 + by + c = 0$  alakban írjuk és felhasználjuk, hogy  $x_1 + x_2 = -p$ ,  $x_1x_2 = q$ , akkor

$$\begin{aligned} \frac{c}{a} &= y_1y_2 = \frac{x_1(1+x_1)x_2(1+x_2)}{(1-x_2)(1-x_1)} = \frac{x_1x_2[1+(x_1+x_2)+x_1x_2]}{1-(x_1+x_2)+x_1x_2} = \frac{q(1-p+q)}{1+p+q}, \\ \frac{b}{a} &= -(y_1+y_2) = -\frac{(x_1+x_1^2)(1-x_1)+(x_2+x_2^2)(1-x_2)}{(1-x_2)(1-x_1)} = \frac{x_1^3+x_2^3-(x_1+x_2)}{1+p+q} = \\ &= \frac{(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)-(x_1+x_2)}{1+p+q} = \frac{-p^3+3pq+p}{1+p+q} = \frac{p(1+3q-p^2)}{1+p+q}. \end{aligned}$$

tehát pl.  $a = 1$  választással egy az előírásnak megfelelő egyenlet:

$$y^2 + \frac{p(1+3q-p^2)}{1+p+q}y + \frac{q(1-p+q)}{1+p+q} = 0,$$

vagy,  $a = 1 + p + q$  választással (amivel  $a \neq 0$ , tehát az egyenlet valóban másodfokú):

$$(1) \quad (1+p+q)y^2 + p(1+3q-p^2)y + q(1-p+q) = 0.$$

Pl.  $p = -1$ ,  $q = -12$ -vel az adott egyenlet gyökei  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 4$ , az (1) egyenlet:  $-12y^2 + 36y + 120 = 0$ , ennek gyökei:  $y_1 = -2$ ,  $y_2 = 5$ , és ezek, valamint  $x_1$  és  $x_2$  között valóban fennállanak az előírt összefüggések.

*Kátai Szabolcs* (Bp. I., Toldy F. g. I. o. t.)