I. megoldás: A 473. gyakorlatban (lásd 81. o.) tett megállapításunkat – amely szerint, ha $b = ck + d$, akkor $b^n = cK + d^n$, ahol b, c, k, d, K egész számok és n pozitív egész szám – úgy is kimondhatjuk, hogy a $b^n : c$ osztás maradéka ugyanaz, mint a $d^n : c$ osztásé, ahol $d = b - ck$. Ezt $b = 5342$ és $c = 11$-gyel alkalmazva d-t vehetjük az $5342 : 11$ osztás maradékának, 7-nek, és így a keresett maradékot a $7^{82} : 11$ osztás maradékaként is megkaphatjuk.[1]

Az alaphoz hasonlóan a kitevőben is áttérhetünk kisebb számon való vizsgálatra. Alkalmazhatjuk ugyanis feladatunkra Fermat tételét:[2] mivel 11 törzsszám, továbbá 7 és 11 relatív prímek, azért $7^{11-1} - 1 = 7^{10} - 1$ osztható 11-gyel: $7^{10} - 1 = 11k$. Másrészt $7^{80} - 1 = \left(7^{10}\right)^8 - 1$ osztható $7^{10} - 1$-gyel és így 11-gyel is, azért $7^{80} - 1 = 11K$, másképpen $7^{80} = 11K_1 + 1$. Most már $7^{82} = 7^2 \cdot 7^{80} = 49(11K_1 + 1) = 11K_2 + 49$ és ez azt mutatja, hogy a keresett maradék annyi, mint a $49 : 11$ osztásé, vagyis 5.

Gazsi Lajos (Kaposvár, Táncsics M. g. II. o. t.)

II. megoldás: Miután 5342^{82} vizsgálatáról áttértünk 7^{82}-ére, a maradék megállapításában hatványról hatványra haladhatunk tovább. Eközben nem szükséges az egyes hatványokat tényleg kiszámítani, mert ha egy hatvány maradékát már kiszámítottuk, a következő hatvány maradéka ugyanannyi, mint a már megkapott maradék 7-szeresének a maradéka. Valóban, ha
$$7^n = 11K_n + r_n,$$
akkor
$$7^{n+1} = 7 \cdot 7^n = 7(11K_n + r_n) = 11 \cdot 7 \cdot K_n + 7r_n.$$

Mivel továbbá 11-gyel való osztásnál legfeljebb 11-féle különböző maradék léphet fel, így legkésőbb a 12 lépésig egy maradéknak kétszer kell fellépnie, és attól kezdve a maradékok periodikusan ismétlődnek, ami ismét megkönnyíti a számolást.

A számolás így alakul: 11-gyel való osztásnál

$$\begin{array}{llllll}
7^1 & \text{maradéka} & 7, & & & \\
7^2 = 49 & \text{”} & 5, & & & \\
7^3 & \text{”} & = 7 \cdot 5 = 35, & \text{maradéka} & = & 2, \\
7^4 & \text{”} & = 7 \cdot 2 = 14, & \text{”} & = & 3, \\
7^5 & \text{”} & = 7 \cdot 3 = 21, & \text{”} & = & 10, \\
7^6 & \text{”} & = 7 \cdot 10 = 70, & \text{”} & = & 4, \\
7^7 & \text{”} & = 7 \cdot 4 = 28, & \text{”} & = & 6, \\
7^8 & \text{”} & = 7 \cdot 6 = 42, & \text{”} & = & 9, \\
7^9 & \text{”} & = 7 \cdot 9 = 63, & \text{”} & = & 8, \\
7^{10} & \text{”} & = 7 \cdot 8 = 56, & \text{”} & = & 1, \\
7^{11} & \text{”} & = 7 \cdot 1 = 7. & & &
\end{array}$$

Innen tehát periodikusan ismétlődnek a 7, 5, 2, 3, 10, 4, 6, 9, 8, 1 maradékok. A 20-ik, 30-ik, …, 80-ik hatvány maradéka újra 1 lesz, a 81-iké 7, a 7-nek a 82-ik hatványa pedig 5-öt ad maradékul 11-gyel való osztásnál, és ezzel együtt 5342^{22} is.

Németh Attila (Győr, Bencés g. I. o. t.)

Megjegyzések: A kisebb alapra és kisebb kitevőre való áttérésben lényegében a fenti gondolatmenetek mellett számos más átalakítást is használtak megoldóink. Néhány ilyen (a nagy betűk egész számokat jelölnek):

$$5342 = 11 \cdot 486 - 4; \quad (-4)^{82} = 2^{164} = 2^4(2^5)^{32} = 16(33-1)^{32} =$$
$$= 16(11M_1 - 1)^{32} = 16 \cdot 11M_2 + 16(-1)^{32}\text{-nek 11-es maradéka annyi, mint 16-é;}$$
$$7^{82} = 49^{41} = (11P_1 + 5)^{41} = 11P_2 + 5^{41}; \; 5^{41} = 5 \cdot 25^{20} = 5(11 \cdot 2 + 3)^{20} =$$
$$= 11P_3 + 5 \cdot 3^{20}; 5 \cdot 3^{20} = 5 \cdot 81^5 = 5(11 \cdot 7 + 4)^5 = 11P_4 + 5 \cdot 4^5;$$
$$5 \cdot 4^5 = 20 \cdot 4^4 = (11 + 9)(11 \cdot 23 + 3) \text{ maradéka annyi, mint } 9 \cdot 3 = 27\text{-é.}$$

Az utóbbi átalakítás első lépése azt mutatja, hogy a nagyobb alap is lehet célszerű. A II. megoldáshoz hasonlóan a 49 szám első, 2-ik, …, 6-ik hatványának maradéka a 11-gyel való osztásnál rendre 5, 3, 4, 9, 1, 5, eszerint a 10-ik, 15-ik, …, 40-ik hatvány maradéka újra 1, és a 41-iké 5.

---

[1] Ehhez a megállapításhoz így is eljuthatunk: $5342^{82} - 7^{82}$ osztható $5342 - 7 = 11 \cdot 485$-tel, és így 11-gyel is; így azonban nem látjuk, hogyan került be meggondolásunkba a 7-es szám.

[2] Lásd pl. *Kürschák-Hajós-Neukomm-Surányi :* Matematikai Versenytételek I. rész, Középiskolai Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó 1955, 58. és 45. o.; vagy: *Faragó László:* A számelmélet elemei, Középisk. Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó 1954, 75. és 48. o.