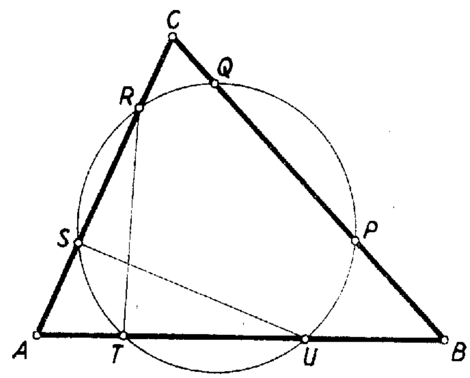
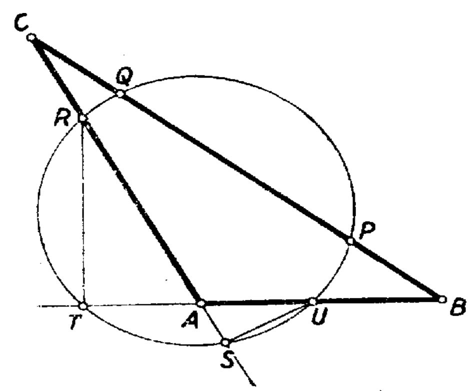
Az adott szorzat első két tényezőjének csak úgy van értelme, ha T és U nem esnek B-be. Ekkor P és Q is különbözők B-től, mert különben a körnek három különböző pontja lenne AB-n; ezek szerint B nincs rajta a körön. Hasonlóan A is és C is vagy kívül van a körön, vagy belül. A kör által létrehozott hat metszéspont közül azonban 2–2 egybe is eshet, ha ti. a kör az illető oldalt vagy meghosszabbítását éppen érinti.

Mivel a P és Q, az R és S, a T és U pontpárok az adott szorzatban azonos szerepet játszanak, választhatjuk a betűzést úgy, hogy az ST ívek egyikén ne legyen további metszéspont, más szóval, hogy P, Q, R, U ugyanazon az ST íven legyenek. Így az S, U és T, R pontpárokat összekötve az ASU és ATR háromszögek hasonlók, mert U, ill. R-nél levő szögük a körnek „üres" ST ívén nyugvó kerületi szögek, A-nál levő szögeik pedig vagy azonosak (ha A a körön kívül van, 1. ábra), vagy egymásnak csúcsszögei (ha A belső pont, 2. ábra), tehát páronként egyenlők.



1. ábra



2. ábra

Ebből az adott osztóviszony-szorzat azon négy szakaszának abszolút értékére, melyeknek egyik végpontja A:

(1) $$\frac{AU}{AS} = \frac{AR}{AT}$$

másképpen

(2′) $$\frac{AT \cdot AU}{AR \cdot AS} = 1 \quad \text{vagy} \quad AR \cdot AS = AT \cdot AU,$$

szavakban: egy állandó A ponton át a körhöz húzott szelők metszeteinek, ill. egy állandó A ponton átmenő húrok metszeteinek szorzata állandó.

Hasonlóan kapjuk, hogy

(2″) $$\frac{BP \cdot BQ}{BT \cdot BU} = 1 \qquad \text{és} \qquad \frac{CR \cdot CS}{CP \cdot CQ} = 1$$

és e három hányadosból összeszorzással, majd tényezőkre bontással

(3) $$\frac{AT \cdot AU \cdot BP \cdot BQ \cdot CR \cdot CS}{AR \cdot AS \cdot BT \cdot BU \cdot CP \cdot CQ} = \frac{AT}{BT} \cdot \frac{AU}{BU} \cdot \frac{BP}{CP} \cdot \frac{BQ}{CQ} \cdot \frac{CR}{AR} \cdot \frac{CS}{AS} = 1.$$

Innen már látható, hogy a bizonyítandó összefüggés abszolút értékben (minden szakaszt pozitívnak véve) helyes.

Hogy osztóviszonyokra térhessünk át[1] – amelyekben szakaszok helyett irányított (azaz előjeles) utak hányadosáról van szó –, csak azt kell belátnunk, hogy az (1) és a belőle következő (2) és (3) összefüggések akkor is érvényesek, ha

[1] Lásd ezek fogalmát illetően pl. *Kárteszi Ferenc* cikkét „A Menelaos- és a Ceva-féle tételről" lapunk XI. kötetének 67–75. oldalán (1955 november).

a háromszög oldalegyenesein irányítást vezetünk be – az utakat pl. A-tól B, B-től C és C-től A felé véve pozitívnak. Ugyanis A az R és S, ill. T és U alappont-párokra vonatkozóan egyformán vagy külső vagy belső pont (1–2. ábrák), tehát (1) két oldalán egyenlő jelű hányadosok állnak, ($2'$) és ($2''$) előjellel is érvényesek.

Megjegyzés: A megoldások nem tértek ki az előjelek kérdésére. Felhívjuk olvasóink figyelmét az idézett cikkre és általában is lapunk régebbi köteteinek tanulmányozására.