I. megoldás: Az egyenlet gyökei az ismert oldóképlet alkalmazásával:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2},\qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}.$$

Hogy a diszkrimináns teljes négyzet, ezt más szóval úgy mondhatjuk, hogy négyzetgyöke és vele a gyökök számlálója egész; azt kell csak megmutatnunk tehát, hogy a számlálók páros számok. Ámde a diszkrimináns és vele a négyzetgyöke is aszerint páros, ill. páratlan, hogy b páros, ill. páratlan, azaz mindkét számlálóban a két-két tag egyenlő párosságú. Ekkor pedig összegük is, különbségük is páros, amit bizonyítani akartunk.

Fekete Jenő (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. I. o. t.)

II. megoldás: Az I. megoldásban előrebocsátottak szerint mindkét gyök racionális. Legyen tovább nem egyszerűsíthető alakban egyikük, pl. $x_1=\frac{p}{q}$, ahol p és q relatív prím egészek. Ez kielégíti az egyenletet, azaz

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2+b\frac{p}{q}+c=0.$$

Innen szorzással és rendezéssel az egész számok között fennálló

$$p^2=-bpq-cq^2=-q(bp+cq)$$

egyenlőségre jutunk, amely szerint p^2 osztható q-val. Ámde p és q-val együtt p^2 és q is relatív prímek, ennélfogva az oszthatóság csak $q=1$-gyel (vagy $q=-1$-gyel) teljesülhet, akkor pedig $x_1=p$ (ill. $-p$), vagyis egész. Evvel – minthogy x_1 a két gyök bármelyikét jelölte –, az állítást bebizonyítottuk.

Szatmári Attila (Bp. V., Eötvös J. g. II. o. t.)

Megjegyzés: A feladat állítása speciális esete a következő általános tételnek ha egy csupa egész együtthatókat tartalmazó algebrai egyenletben a legmagasabb fokú tag együtthatója 1, és az egyenletnek van racionális gyöke, akkor ez a gyök egész.

Börzsöny László (Bp. V., Eötvös J. g. II. o. t.)