I. megoldás: Törzstényezők szorzatára bontva $66 = 2\cdot 3\cdot 11$. Megmutatjuk, hogy a $N = 43^{23}+23^{43}$ összeg osztható 2, 3 és 11 mindegyikével, és így szorzatukkal is, mivel ezek a számok páronként relatív prímek.

N páros, mert két páratlan szám összege, ugyanis páratlan számnak minden (pozitív egész kitevőjű) hatványa is páratlan. A 43 szám $3k+1$ alakú, ezért minden hatványa $3K_1+1$ alakú, a 23 pedig $3k-1$ alakú, ezért minden páratlan kitevőjű hatványa $3K_2-1$ alakú (a páros kitevőjűek $3K+1$ alakúak), így a N szám $3(K_1+K_2)$ alakú, osztható 3-mal (itt k, K, K_1, K_2 egész számok).

Általában belátható, hogy ha b a c-nek valamely többszörösétől d-vel tér el, azaz ha $b = ck + d$ alakú, ahol b, c, k egész szám, és így d is az, akkor b-nek hatványa, b^n a c-nek valamely többszörösétől d^n-nel tér el. Ugyanis a hatványnak a

$$b^n = (ck+d)^n = (ck \overset{1}{\smile}{+} d)(ck \overset{2}{\smile}{+} d)\dots(ck \overset{n}{\smile}{+} d)$$

értelmezés alapján lépésről lépésre való kiszámításában (vagyis egyszerre mindig csak egy $ck+d$ tényezőt hozzászorozva az előtte álló tényezők szorzatához) minden tagot minden taggal szorozva és e szorzatokat összegezve egyetlen kivétellel minden szorzatban legalább egy tényező többszöröse c-nek, tehát e szorzatok összege is többszöröse c-nek. Az a szorzat az egyetlen kivétel, amely kizárólag d tényezőkből alakul; ez két $ck+d$ tényező összeszorzása után d^2, háromé után d^3, az utolsó lépés után d^n.

Ezt a megállapításunkat $c = 11$-gyel a $b = 43 = 11\cdot 4 - 1$, ill. a $b = 23 = 11\cdot 2 + 1$ számokra alkalmazva, vagyis amikor $d = -1$, ill. $d = +1$, azt kapjuk, hogy N a 11-nek valamely többszörösétől $(-1)^{23} + (+1)^{43} = 0$-val tér el, azaz osztható 11-gyel.

Bácsy Zsolt (Bp. V., Eötvös J. g. I. o. t.)

II. megoldás: Alkalmazzuk előbbi megállapításunkat az $N = 43(43^2)^{11} + 23(23^2)^{21}$ előkészítő átalakítás alapján $c = 66$-tal a $b = 43^2 = 66\cdot 28 + 1$, ill. $b = 23^2 = 66\cdot 8 + 1$ számokra, azaz mindkét esetben $d = 1$-gyel és $n = 11$, ill. $n = 21$-gyel. Így

$$N = 43(66\cdot 28+1)^{11} + 23(66\cdot 8+1)^{11} = 43(66K_1+1) + 23(66K_2+1) =$$
$$= 66(K_1+K_2+1) = 66K_3,$$

amit bizonyítani akartunk.

Müller Miksa (Makó, József A. g. II. o. t.)

III. megoldás: Alakítsuk át az N számot a következőképpen, hogy tényezőkre bontható kifejezésekhez jussunk:

$$N = (43^{23} + 23^{23}) + (23^{43} - 23^{23}) = (43^{23} + 23^{23}) + 23^{23}(23^{20} - 1).$$

Itt az ismert

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a+b)m,$$

ill.

$$a^{2n} - b^{2n} = (a^2 - b^2)m'$$

oszthatósági tételek szerint (ahol, ha a és b egészek, akkor m és m' is egészek) az első zárójelbeli összeg osztható $43 + 23 = 66$-tal, a másodikbeli pedig $23^2 - 1^2 = 528 = 8\cdot 66$-tal és így N osztható 66-tal.

Bálint András (Bp. V., Apáczai Csere J. gyak. g. II. o. t.)

Megjegyzés: Sok dolgozat használ a bemutatottakhoz hasonló más átalakításokat, pl. $43 = 33+10$ és $23 = 33-10$, vagy $23 = 66-43$ alakban.