I. megoldás: Vegyük észre, hogy a bizonyítandó egyenlőtlenségben az $n+1$ természetes szám gyökkitevőként is és osztóként is fellép. Ez eszünkbe juttatja a mértani és a számtani középre vonatkozó egyenlőtlenséget.[1] Eszerint az $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ pozitív számokra:

$$\sqrt[n+1]{a_1 a_2 \ldots a_{n+1}} \leqq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}}{n+1}. \tag{1}$$

Ötletünket az is támogatja, hogy osztandónk is tekinthető $n+1$ tagú összegnek, hiszen $ny = y + y + \ldots + y$ (n tag); az viszont nehézség, hogy a gyök alatt nem szorzat áll, továbbá az ott álló $\frac{x}{y}$ sincs meg a hányadosban. Ha azonban a jobb oldalon y-nal „egyszerűsítünk” és az osztandóban így előálló n helyett n db 1-es összegét írjuk, akkor ezeknek 1^n szorzatát is beírhatjuk a gyök alá tényezőnek! Eszerint ötletünk kidolgozása a következő:

Alkalmazzuk (1)-et a következő számokra:

$$a_1 = \frac{x}{y}, \quad a_2 = a_3 = \ldots = a_{n+1} = 1.$$

Így

$$\sqrt[n+1]{\frac{x}{y} \cdot 1^n} = \sqrt[n+1]{\frac{x}{y}} \leqq \frac{\frac{x}{y} + n \cdot 1}{n+1} = \frac{x+ny}{(n+1)y},$$

éppen amit bizonyítanunk kellett. Az egyenlőségjele akkor és csak akkor érvényes, ha $\frac{x}{y} = 1$, vagyis $x = y$.

Czékus Laborc (Bp. I., Toldy F. g. II. o. t.)

II. megoldás: Tegyük fel, hogy a bizonyítandó egyenlőtlenség helyes, és igyekezzünk belőle átalakításokkal beláthatóan igaz egyenlőtlenségre jutni. A gyököt a-val jelölve, valamint a jobboldalon y-nal egyszerűsítve a bizonyítandó egyenlőtlenség így alakul:

$$a \leqq \frac{\frac{x}{y} + n}{n+1} = \frac{a^{n+1} + n}{n+1}.$$

$n+1 > 0$ alapján szorzással és rendezéssel

$$a(n+1) - n \leqq a^{n+1}$$

$$a(n+1) - n - 1 = (a-1)(n+1) \leqq a^{n+1} - 1. \tag{2}$$

Zárjuk ki az $a = 1$ esetet. Ekkor ugyanis $x = y$ és közvetlenül látjuk, hogy a bizonyítandó összefüggés érvényes, éspedig egyenlőségi jellel. Most már oszthatjuk (2)-t $a-1$-gyel, de az osztó előjelét figyelembe véve, két esetet kell megkülönböztetnünk. Felhasználjuk, hogy $a = 1$ kivételével minden a-ra fennáll a következő azonosság:

$$\frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} = a^n + a^{n-1} + \ldots + a + 1.$$

Ezek szerint $a > 1$ esetén azt kell bizonyítanunk, hogy

$$n + 1 \leqq a^n + a^{n-1} + \ldots + a + 1. \tag{3}$$

Ez pedig igaz, mert a jobboldalon $n+1$ tag áll, és $a > 1$ folytán az első n tag mindegyike nagyobb 1-nél, az utolsó pedig egyenlő vele. Egyenlőség sohasem teljesül.

$a < 1$ esetén (2) osztásával azt kelt bizonyítanunk, hogy

$$n + 1 \geqq a^n + a^{n-1} + \ldots + a + 1. \tag{4}$$

Ez is igaz, mert a feladat feltevései folytán $a > 0$ is áll, vagyis most $0 < a < 1$, ekkor pedig a jobboldalon az első n tag mindegyike kisebb 1-nél, az utolsó pedig 1 és így a jobboldali kifejezés kisebb $n+1$-nél. Egyenlőség sohasem teljesül.

Minthogy valamennyi alkalmazott átalakító lépésünk megfordítható (elhanyagolásokat csak (3) és (4) érvényességének belátásánál használtunk), azért az adott egyenlőtlenség minden figyelembe veendő esetben érvényes.

Bollobás Béla (Bp. V., Apáczai Csere J. gyak, g. I. o. t.)

[1] Lásd pl.: *Matematikai Versenytételek* I. rész 111. o.