I. megoldás: A kérdés eldöntése nyilván csak úgy lesz tanulságos, a gondolatok csak akkor lesznek más esetekben is használhatók, ha válaszunkat nem a két oldalnak külön-külön való kiszámításával készítjük elő.

Vonjuk le a jobboldalból a balt, a közös nevező 79^4 lesz, a számláló pedig így alakítható át (igyekezve szorzatokat alakítani és a közös tényezőket kiemelni):

$$
\begin{gathered}
79^2(40^2+51^2+91^2)-40^4-51^4-91^4=41^2(79^2-40^2)+\\
+51^2(79^2-51^2)-91^2(92^2-79^2)=\\
=40^2\cdot 119\cdot 39+51^2\cdot 130\cdot 28-91^2\cdot 170\cdot 12=4^2\cdot 10^2\cdot 7\cdot 17\cdot 3\cdot 13+\\
+3^2\cdot 17^2\cdot 10\cdot 13\cdot 4\cdot 7-7^2\cdot 13^2\cdot 17\cdot 10\cdot 4\cdot 3=\\
=3\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot 13\cdot 17(4\cdot 10+3\cdot 17-7\cdot 13)=\\
=3\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdot 13\cdot 17(40+51-91)=0
\end{gathered}
$$

Azt nyertük, hogy a két oldal különbsége 0, és így igazoltuk az egyenlőség helyességét.

Balogh Anikó (Bp., V., Veress Pálné lg. I. o. t.)

II. megoldás: Vegyük észre a kétoldali hatványalapok megegyezésén felül azt is, hogy $40+51=91$, és kérdezzük általában: mely feltétel mellett igaz az

$$\frac{a^4+b^4+(a+b)^4}{c^4}=\frac{a^2+b^2+(a+b)^2}{c^2}, \tag{1}$$

egyenlőség?

(1)-ből a zárójelek felbontásával és felezéssel:

$$\frac{a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4}{c^4}=\frac{a^2+b^2+ab}{c^2},$$

itt pedig a baloldali kifejezésben ráismerhetünk a jobboldalinak a négyzetére.

Az $x^2=x$ egyenlőség viszont teljesül, ha $x=1$, ennélfogva (1) igaz voltának elegendő feltétele, hogy álljon:

$$c^2=a^2+ab+b^2. \tag{2}$$

Ez a mi esetünkben teljesül, ugyanis $a=40$, $b=51$ és $c=79$-cel egyrészt

$$c^2-a^2=79^2-40^2=39\cdot 119=3\cdot 13\cdot 7\cdot 17,$$

másrészt

$$ab+b^2=40\cdot 51+51^2=51\cdot 91=3\cdot 17\cdot 7\cdot 13,$$

ennélfogva az eredeti egyenlőség is igaz.

Bácsy Zsolt (Bp., V., Eötvös J. g. I. o. t.)

Megjegyzés. $x^2=x$ akkor is teljesül, ha $x=0$. Az $a^2+ab+b^2=0$ követelményből azonban a és b hányadosa nem valós szám, így nem kapunk a feladatban bemutatotthoz hasonló tetszetős egyenlőséget. Egyébként a (2) egyenlőséget pl. a jóval kisebb $a=3$, $b=5$, $c=7$ számok is kielégítik.