I. megoldás: Legyen a két különböző páratlan szám a és $(a+x)$, ahol a páratlan, x pedig, páros. Köbeik különbsége:

$$(a+x)^3-a^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3-a^3=$$
$$=3ax(a+x)+x^3=x[3a(a+x)+x^2].$$

Ez csak akkor osztható a két szám különbségének kétszeresével, $2x$-szel, ha a szögletes zárójelen belüli rész osztható 2-vel. De $3a$ és $(a+x)$ páratlanok, a szorzatuk is az, x^2 páros. $3a(a+x)+x^2$ tehát páratlan.

A két szám köbének különbsége valóban nem osztható a két szám különbségével.

Fejes László (Makó, József A. g. II. o. t.)

II. megoldás: Elegendő azt igazolnunk, hogy két páratlan szám köbének különbségét a két szám különbségével osztva páratlan számot kapunk. Legyen a két páratlan szám a és b, akkor ismert oszthatósági tétel alapján

$$\frac{a^3-b^3}{a-b}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a-b}=a^2+ab+b^2.$$

Mivel a és b páratlan, a^2, ab és b^2 is az, a három páratlan szám összege szintén páratlan.

Ezzel állításunkat igazoltuk.

Marton Katalin (Bp., VI., Varga Katalin lg. II. o. t.)

Megjegyzések: 1. A feladat ugyanezzel a gondolatmenettel általánosítható. Ha a, b és k páratlan, akkor a^k-b^k nem osztható $2(a-b)$-vel, mert

$$\frac{a^k-b^k}{a-b}=a^{k-1}+a^{k-2}b+\ldots+ab^{k-2}+b^{k-1}$$

páratlan számú (k darab) páratlan szám összege, s így páratlan. – Ha a és b közül az egyik páratlan, a másik páros, akkor ugyanez fennáll, hiszen a vizsgált hányadosban akkor páros számú ($k-1$ darab) páros és egy páratlan szám összege áll.

Ha a is, b is páros, akkor a^n-b^n osztható $2^{n-1}(a-b)$-vel, mert az $a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}$ minden tagja osztható 2^{n-1}-nel.

2. Páros n-re nem igaz a tétel, hiszen a vizsgált összeg ekkor páros számú páratlan tagból áll, vagyis 2-vel osztható lesz.

3. A bizonyított állítást is megfogalmazhatjuk: ha két egész szám közül legalább az egyik páratlan, akkor páratlan kitevőjű hatványaik különbsége 2-nek legfeljebb annyiadik hatványával osztható, ahányadikkal az alapok különbsége.