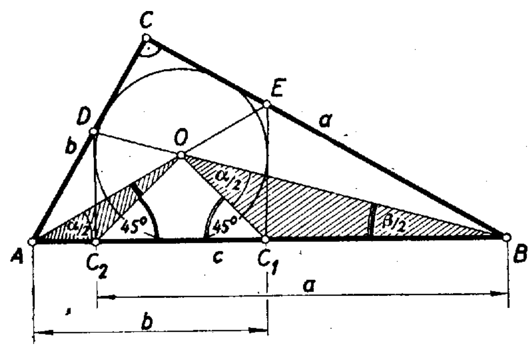
I. megoldás: Az ABC derékszögű háromszög A és B csúcsának szögfelezőire tükrözzük a derékszögű csúcsot (1. ábra), jelöljük az így kapott pontokat C_1-gyel és C_2-vel, a szögfelezők metszéspontjait a befogókkal D-vel és E-vel.



1. ábra

A tükrözés miatt DC_2 és EC_1 érintői lesznek az O középpontú beírt körnek s mivel mindkettő merőleges a c átfogóra, párhuzamos érintők lesznek. Így távolságuk

$$C_1C_2 = 2\varrho$$

(ϱ jelöli a beírt kör sugarát).

Az OC_1C_2 derékszögű egyenlő szárú háromszög befogói Pythagoras-tétellel kiszámíthatók:

$$OC_1 = OC_2 = \varrho\sqrt{2}. \tag{1}$$

A tükrözés következtében:

$$BC_2 = a \quad \text{és} \quad AC_1 = b,$$

ezért

$$AC_2 = c - a \quad \text{és} \quad BC_1 = c - b. \tag{2}$$

Az OC_1C_2 háromszög derékszögű és egyenlő szárú, C_1-nél és C_2-nél levő szögei 45°-osak. Az OAC_2 háromszögnek a C_2-nél levő 45°-os szög külső szöge, az $\frac{\alpha}{2}$ szöget tehát a háromszög O-nál levő szöge 45°-ra egészíti ki; így ez a szög csak $\frac{\beta}{2}$ lehet (hiszen az eredeti derékszögű háromszögben $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 45°$). Ugyanígy a BOC_1 háromszög O-nál levő szöge $\frac{\alpha}{2}$. A két háromszög tehát hasonló egymáshoz, megfelelő oldalaik aránya megegyezik:

$$AC_2 : C_2O = OC_1 : C_1B.$$

Az aránypárba az (1) és (2) alatti értékeket beírva:

$$(c - a) : \varrho\sqrt{2} = \varrho\sqrt{2} : (c - b),$$

azaz

$$2\varrho^2 = (c - a)(c - b).$$

2-vel megszorozva mindkét oldalt:

$$(2\varrho)^2 = 2(c - a)(c - b).$$

Ezzel épp a bizonyítandó tételt igazoltuk.

Székely Jenő (Pécs, Nagy Lajos g. I. o. t.)

II. megoldás: Ismeretes, hogy a háromszög területe a beleírható kör sugarával és a félkerülettel kifejezhető:

$$t = \varrho s = \varrho\frac{a + b + c}{2}.$$

Derékszögű háromszög esetén:

$$t = \frac{ab}{2}.$$

A kettőt összevetve

$$2\varrho = \frac{2ab}{a + b + c}.$$

Emeljük négyzetre mindkét oldalt:

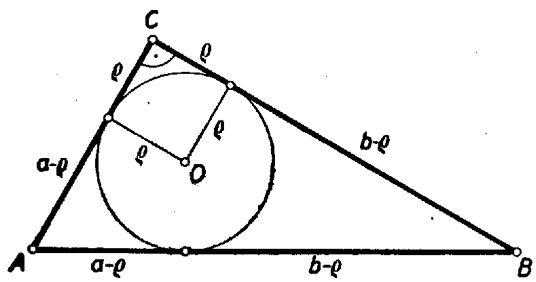
$$4\varrho^2=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}.$$

A Pythagoras-tétel alkalmazásával:

$$\begin{aligned}4\varrho^2&=\frac{4(c^2-b^2)(c^2-a^2)}{c^2+c^2+2ab+2ac+2bc}=\frac{4(c-b)(c+b)(c-a)(c+a)}{2[c(a+c)+b(a+c)]}=\\&=\frac{2(c-b)(c+b)(c-a)(c+a)}{(c+b)(a+c)}=2(c-a)(c-b).\end{aligned}$$

Tihanyi Ambrus (Bp., V., Apáczai Csere g. II. o. t.)

III. megoldás: Rajzoljuk meg az a, b, c oldalú derékszögű háromszögbe a ϱ sugarú beírható kört és rajta az érintési pontokat (2. ábra).



2. ábra

Egy pontból a körhöz húzható érintőszakaszok egyenlősége alapján könnyen látható, hogy a c átfogó a következő két szakasz összege:

$$c=(a-\varrho)+(b-\varrho).$$

Innen

$$2\varrho=a+b-c,$$

négyzetre emelve s a Pythagoras-tételt fölhasználva:

$$\begin{aligned}4\varrho^2&=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc=2c^2+2ab-2ac-2bc=\\&=2c(c-a)-2b(c-a)=2(c-a)(c-b).\end{aligned}$$

Állításunkat ezzel bizonyítottuk.

Németh Márta (Kazincbarcika, Vegyip. tech. I. o. t.)