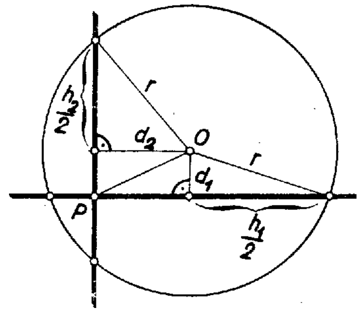
Az 1. ábrán megrajzoltunk az O középpontú körben egy P ponton átmenő két egymásra merőleges h_1, h_2 húrt.



1. ábra

Jelöljük a húroknak a középponttól mért merőleges távolságát d_1-gyel és d_2-vel, a kör sugarát r-rel. A d_1 és d_2 meghúzásával keletkező derékszögű háromszögekre a Pythagoras-tételt felírva:

$$\left(\frac{h_1}{2}\right)^2 = r^2 - d_1^2 \quad \text{azaz} \quad h_1^2 = 4r^2 - 4d_1^2,$$
$$\left(\frac{h_2}{2}\right)^2 = r^2 - d_2^2 \quad \text{azaz} \quad h_2^2 = 4r^2 - 4d_2^2.$$

Így a húrok négyzeteinek összege:

$$h_1^2 + h_2^2 = 8r^2 - 4(d_1^2 + d_2^2).$$

$d_1^2 + d_2^2$ viszont a d_1 és d_2 oldalú téglalap átlójának négyzetével egyenlő, az átló pedig az O középpont és a fix P pont távolsága. Így a húrok négyzetösszege valóban a

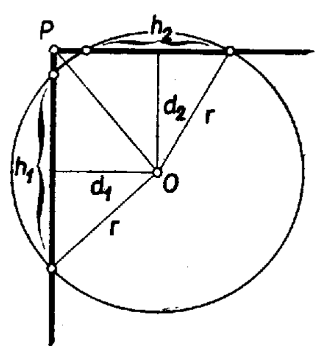
$$8r^2 - 4\,OP^2$$

állandó értékkel egyenlő, a húrok helyzetétől függetlenül.

Ha az egyik húrt a kör átmérőjének vesszük fel, csak egy derékszögű háromszög keletkezik, és a téglalap egy szakasszá fajul. A levezetés és a tétel viszont érvényes marad ez esetben is, mivel a középponton átmenő húrnak a középponttól való távolsága 0. – Ha P a kör középpontjával esik egybe, állításunk magától értetődő.

Gáspár Mária (Balassagyarmat, Balassa g. I. o. t.)

Megjegyzések: 1. Síkbeli tételünk igaz körön kívül fekvő P pontra is, ha belőle a körhöz két, egymásra merőleges szelőt húzhatunk.



2. ábra

Ha az így húzható szelők a körből h_1 és h_2 húrt metszenek ki, itt is (l. a 2. ábrát):

$$\left(\frac{h_1}{2}\right)^2 = r^2 - d_1^2,$$
$$\left(\frac{h_2}{2}\right)^2 = r^2 - d_2^2,$$

a két egyenlőség összeadásával

$$h_1^2 + h_2^2 = 8r^2 - 4(d_1^2 + d_2^2).$$

Mivel $d_1^2+d_2^2=OP^2$ állandó, állításunkat igazoltuk.

Ha a P pont olyan távol van a körtől, hogy P-ből a körhöz már csak két merőleges érintőt húzhatunk, akkor

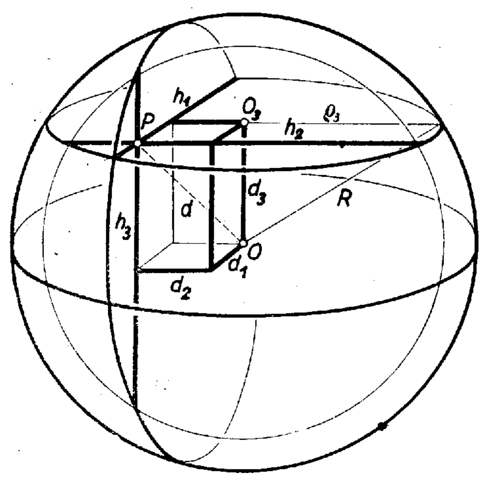
$$OP=r\sqrt{2}.$$

Annak feltétele tehát, hogy a körhöz két egymásra merőleges szelőt húzhassunk, az, hogy

$$OP<r\sqrt{2}.$$

2. Felvetődik a kérdés, igaz-e ilyen értelmű megállapítás a kör térbeli megfelelő alakzatának, a gömbnek húrjaira is? A válasz: igen, *egy gömb belsejében levő ponton áthaladó három, egymásra páronként merőleges gömbi húr négyzetösszege állandó.*

Jelöljük a húrok síkjai által kimetszett gömbi körök sugarait ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3-mal, a gömb sugarát R-rel, a húrok hosszát h_1, h_2 és h_3-mal, a gömbi körök síkjának távolságát a gömb középpontjától d_1, d_2, d_3-mal, az OP szakasz hosszát d-vel (3. ábra).



3. ábra

Az előző megoldás szerint:

$$h_1^2+h_2^2=4(2\varrho_3^2-O_3P^2).$$

Pythagoras-tétele szerint $\quad \varrho_3^2=R^2-d_3^2 \quad$ és $\quad O_3P^2=d^2-d_3^2.$

Tehát $\quad h_1^2+h_2^2=8R^2-4(d^2+d_3^2),$

ugyanígy

$$h_2^2+h_3^2=8R^2-4(d^2+d_1^2) \quad \text{és} \quad h_3^2+h_1^2=8R^2-4(d^2-d_2^2).$$

Ebből $\quad 2(h_1^2+h_2^2+h_3^2)=24R^2-12d^2-4(d_1^2+d_2^2+d_3^2).$

d_1, d_2, d_3 a 3. ábrán látható téglatest élei. A térbeli Pythagoras-tétel alapján:

$$d_1^2+d_2^2+d_2^3=d^2,$$

azaz

$$h_1^2+h_2^2+h_3^2=12R^2-8d^2=4(3R^2-2d^2),$$

ami valóban állandó.

Náray Szabó Gábor (Bp. XI., József A. gimn. I. o. t.)

– Hasonlóan igazolhatjuk, hogy a gömbre általánosított tétel érvényes olyan kívüle fekvő pontokra is, melyekből a gömbhöz 3 egymásra merőleges szelő hozható.