I. megoldás: Ha n páros, akkor A így írható:

$$A=12n^2+8n+[9+7]\cdot 2.$$

n páros volta miatt n^2 4-gyel is osztható. Így 12 n^2 osztható 16-tal. Mivel $8n$ is, az utolsó tag is osztható 16-tal, ezért maga A is osztható.

Legyen n páratlan, akkor

$$A=12n^2+8n-4=4(3n^2+2n-1)=4(3n-1)(n+1).$$

Páratlan n esetén $(n+1)$ és $(3n-1)$ párosak, tehát A osztható $4\cdot 2\cdot 2=16$-tal.

Ezzel állításunkat igazoltuk. Mivel a bizonyításban sehol nem használtuk ki, hogy n pozitív páros vagy páratlan szám, A 16-tal való oszthatóságát negatív egész n-ekre és 0-ra is bizonyítottuk. A tétel tehát minden egész számra érvényes.

Kovács Margit (Szombathely, Savaria g. II. o. t.)

II. megoldás: Teljes indukcióval igazoljuk a 16-tal való oszthatóságot n-nek nem-negatív értékeire.

$n=0$ esetén a vizsgált kifejezés értéke 32, $n=1$ esetén pedig 16. Mindkét esetben 16-tal osztható számot kaptunk.

Tegyük fel, hogy $n=k$-ra érvényes az állításunk. Bizonyítjuk, hogy ebből $n=k+2$-re is következik az érvényessége. A kifejezés értéke $n=k+2$ esetén így alakítható:

$$\begin{aligned}A&=12(k+2)^2+8(k+2)+(-1)^{k+2}\left[9+(-1)^{k+2}\cdot 7\right]\cdot 2=\\&=12(k^2+4k+4)+8k+16+(-1)^{k}\left[9+(-1)^{k}\cdot 7\right]\cdot 2\end{aligned}$$

(mivel k és $(k+2)$ egyenlő párosságúak, $(-1)^{k+2}=(-1)^k$.

Tovább alakítva:

$$A=\left\{12k^2+8k+(-1)^k\left[9+(-1)^k\cdot 7\right]\cdot 2\right\}+(48k+64).$$

A kapcsos zárójelben levő részről feltettük, hogy osztható 16-tal, a második rész szintén osztható, hisz mindkét tagban maradék nélkül megvan a 16.

Ezzel igazoltuk, hogy ha egy számra igaz az állításunk, akkor az ennél 2-vel nagyobb számra is igaznak kell lennie. Mivel $n=0$-ra, és $n=1$-re igaz, ezzel minden páros és páratlan pozitív számra bizonyítottuk.

Komlós János (Bp. II., Rákóczi g. II. o. t.)