I. megoldás: A zárójelek felbontásával könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a baloldali tört számlálójában álló n^3-3n-2 mennyiség a következő szorzattá alakítható:

$$n^3-3n-2=(n+1)^2(n-2).$$

Ugyanígy a nevezőben:

$$n^3-3n+2=(n-1)^2(n+2).$$

Így a baloldalon álló törtet a következőképpen alakíthatjuk (felhasználva mindjárt a két szám négyzetének különbségére vonatkozó azonosságot is):

$$\frac{(n+1)^2\left(\sqrt{n-2}\right)^2+(n-1)(n+1)\sqrt{(n-2)(n+2)}}{(n-1)^2\left(\sqrt{n+2}\right)^2+(n-1)(n+1)\sqrt{(n-2)(n+2)}}= \tag{1}$$

$$=\frac{(n+1)\sqrt{n-2}}{(n-1)\sqrt{n+2}}\cdot\frac{(n+1)\sqrt{n-2}+(n-1)\sqrt{n+2}}{(n-1)\sqrt{n+2}+(n+1)\sqrt{n-2}}$$

A második tört számlálójában és nevezőjében felcserélt sorrendben ugyanaz a két tag áll, így értéke azonosan 1. A kérdéses tört tehát minden n-re $\dfrac{(n+1)\sqrt{n-2}}{(n-1)\sqrt{n+2}}$-vel egyenlő. Ezzel épp a kívánt azonosságot igazoltuk.

A bizonyított azonosság (valós számok körében) nincs értelmezve olyan n-ekre, melyekre valamelyik gyök alatt negatív szám áll, vagy a nevező 0 lesz. Az (1) alakból látható, hogy gyök alatt negatív szám nem állhat, ha $n\geq 2$, s ezekre az n-ekre a nevező sem lehet 0.

Máthé Csaba (Győr, Révai g. II. o. t.)

II. megoldás: Az igazolandó azonosság bal oldalát 1-ből levonva

$$\frac{4}{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}+2} \tag{2}$$

adódik. A jobboldalt 1-ből levonva és azután a számlálót gyöktelenítve (annak megfelelően, hogy (2) számlálójában sem fordul elő négyzetgyök csak a nevezőjében):

$$\frac{(n-1)\sqrt{n+2}-(n+1)\sqrt{n-1}}{(n-1)\sqrt{n+2}}=$$

$$=\frac{\left[(n-1)\sqrt{n+2}\right]^2-\left[(n+1)\sqrt{n-2}\right]^2}{(n-1)\sqrt{n+2}\left[(n-1)\sqrt{n+2}+(n+1)\sqrt{n-2}\right]}=$$

$$=\frac{(n^2-2n+1)(n+2)-(n^2+2n+1)(n-2)}{(n-1)^2(n+2)+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}}=$$

$$=\frac{(n^3-3n+2)-(n^3-3n-2)}{n^3-3n+2+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}}=\frac{4}{n^3-3n+2+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}}.$$

Ezzel valóban a (2) kifejezést nyertük. Így a feladatban szereplő azonosság helyes minden olyan n-re, amelyre a szereplő négyzetgyöknek van értelme és amelyekre a nevező nem nulla. Ez fennáll, ha $n\geq 2$.

Perneczky András (Kaposvár, Táncsics g. II. o. t.)