

I. megoldás: Mivel mindkét oldalon pozitív mennyiségek állnak, elegendő a bizonyítandó egyenlőtlenség jobb- és baloldalának négyzetreemelésével keletkező egyenlőtlenséget igazolni:

$$ab + bc + ad + cd \geq ab + 2\sqrt{abcd} + cd,$$

0-ra redukálva és összevonva:

$$ad - 2\sqrt{abcd} + bc \geq 0.$$

A baloldalon teljes négyzet áll:

$$\left(\sqrt{ad} - \sqrt{bc}\right)^2 \geq 0.$$

Ez az egyenlőtlenség igaz, mert négyzetszám nem lehet negatív. Mivel csupa megfordítható lépéssel jutottunk el ehhez az egyenlőtlenséghez, így tehát az eredeti egyenlőtlenség is helyes.

Az egyenlőség jele akkor áll fenn, ha

$$\sqrt{ad} = \sqrt{bc},$$

azaz ha

$$ad = bc.$$

Hornyánszky Tamás (Bp. VIII., Piarista g. II. o. t.)

II. megoldás: A bizonyítandó egyenlőtlenség baloldalán álló kifejezés így is írható:

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} = \sqrt{ab + cd + ad + bc}.$$

Az ad és bc pozitív mennyiségekre érvényes a számtani mértani közép közti összefüggés:

$$ad + bc \geq 2\sqrt{ad \cdot bc},$$

ennek fölhasználásával

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab + cd + 2\sqrt{abcd}} = \sqrt{(\sqrt{ab} + \sqrt{cd})^2} = \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

Ezzel igazoltuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget. Egyenlőség akkor áll fenn, ha a számtani és mértani közép közt egyenlőség áll, azaz ha

$$ad = bc.$$

Balogh Kadosa (Gyula, Erkel g. II. o. t.)