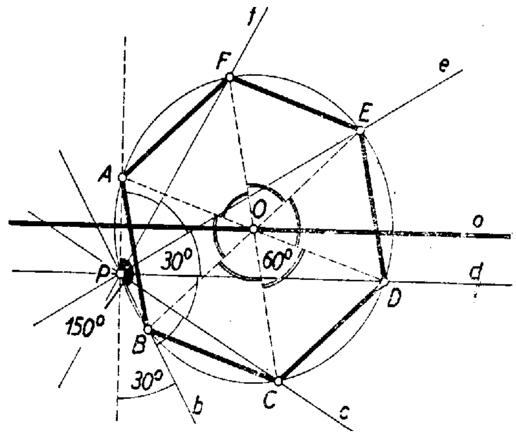
I. megoldás: Ha megrajzolunk egy tetszőleges, a feladatnak megfelelő $ABCDEF$ szabályos hatszöget, az e köré írható kör szimmetrikus az O-t tartalmazó o egyenesre, s így átmegy az A pontnak az o egyenesre való P tükörképén is (1. ábra).



1. ábra

Mivel az AB ívhez tartozó középponti szög 60°, így P pontból az AB ívhez tartozó kerületi szög 30° vagy $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$. Így a hatszög B csúcsa (akárhol van is O az o egyenesen), rajta van egy, a rögzített PA egyeneshez képest 30°-kal elforgatott b egyenesnek P-hez viszonyítva egyik vagy másik oldalán.

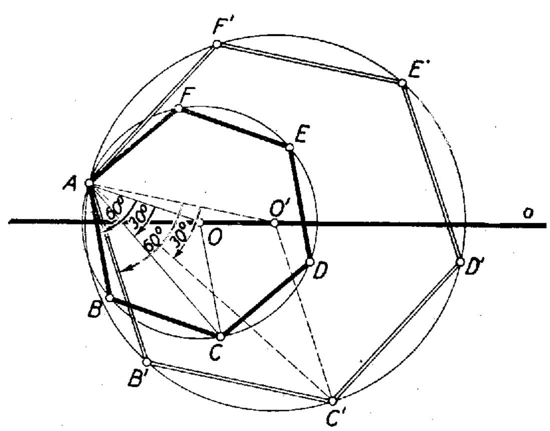
Ugyanígy az AC ívhez tartozó középponti szög 120°, s így P-ből AC-t 60°-os, vagy $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$-os kerületi szög alatt látjuk, tehát C mindig rajta lesz a rögzített PA-hoz képest 60°-kal elforgatott c egyenesen (az elfordítás iránya ugyanaz, mint amellyel b-t is elforgattuk).

A D, E, F pontokhoz tartozó középponti szög mindig 60°-kal növekszik az előzőhöz viszonyítva, s így ezek a pontok is egy-egy, a P-n átmenő egyenesen helyezkednek el, amelyek az előzőhöz képest mindig 30°-kál vannak elfordítva.

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Gönczi László (Bp. II., Rákóczi g. II. o. t.)

II. megoldás: A 2. ábrán megrajzoltunk két, a feladatnak megfelelő $ABCDEF$ és $A'B'C'D'E'F'$ hatszöget.



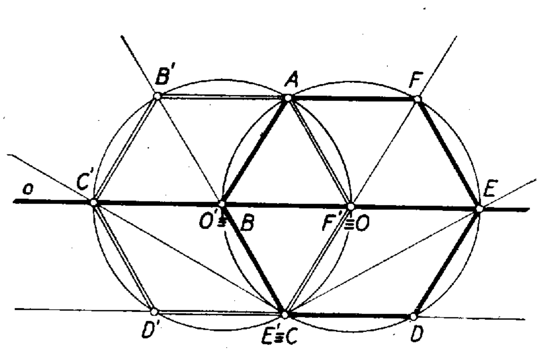
2. ábra

A B pontot a hatszög köré írt kör O középpontjából úgy kapjuk, hogy az AO szakaszt 60°-kal elforgatjuk. Ugyanígy kapjuk az O' pontból a B' pontot is (az elforgatás iránya is egyező lesz a két hatszögnél, feltéve, hogy a megbetűzés ugyanolyan körüljárás szerint történik). Ha egy egyenes pontjait 60°-kal elforgatjuk, a kapott pontok újra egy egyenesen sorakoznak.

Az O pontból a C (illetőleg O'-ből a C') pontot úgy kapjuk, hogy 30°-kal elforgatjuk, és mindig ugyanabban az arányban megnyújtjuk (hiszen az OAC és $O'AC'$ háromszögek hasonlóak egymáshoz). Egy egyenes pontjait egy pont körüli forgatva nyújtás ismét egy egyenes pontjaiba viszi át, a C pontok is egy egyenesen sorakoznak.

A D, E, F pontok hasonlóképpen az o egyenes pontjaiból kaphatók forgatva nyújtással, s így ezek is egy-egy egyenesen sorakoznak.

Az eredményül kapott öt egyenes könnyen meghatározható, ha a 3. ábrán látható, o-ra tükrös helyzetű két hatszöget vesszük fel (egyiknek középpontja a másiknak csúcsa).



3. ábra

Látható, hogy a BB', CC', DD', EE' és FF' egyenesek mind egy ponton mennek át, ez a pont az A pontnak o-ra vonatkozó tükörképe.

Ezzel feladatunkat meg is oldottuk.

Megjegyzés: A feladat állítása (és mindkét bizonyítása) tetszőleges n-oldalú, szabályos sokszögre is érvényes. A PA egyenesből kiindulva $\frac{180^\circ}{n}$ szöggel elfordított egyeneseken sorakoznak a kívánt n-szögek csúcsa