a) A feladat nyilván a pozitív egész számokra vonatkozik. Ezek között 9 egyjegyű szám van. A kétjegyű számok számát megkaphatjuk, ha az 1 és 99 közti összes egészek számából levonjuk az egyjegyűek számát, tehát 90 kétjegyű szám van. Ugyanígy a háromjegyű természetes számok száma $999-99=900$. Mivel az utolsó $(n-1)$-jegyű szám $10^{n-1}-1$, az utolsó n-jegyű szám pedig 10^n-1, ezért az n-jegyű pozitív egészek száma a kettő különbsége:

$$10^n-1-(10^{n-1}-1)=10^n-10^{n-1}=10^{n-1}(10-1)=9\cdot 10^{n-1}.$$

b) Az n-jegyű számok leírásához szükséges számjegyek számát megkapjuk, ha n-et megszorozzuk az n-jegyű számok számával, $9\cdot 10^{n-1}$-nel. így az 1-től 10^n-ig terjedő $(1,\ 2,\ 3,\ \ldots n$ jegyű) számok leírásához szükséges jegyek száma:

$$S_n=1\cdot 9+2\cdot 9\cdot 10+3\cdot 9\cdot 10^2+\ldots+n\cdot 9\cdot 10^{n-1}.$$

Ezzel a feladatot voltaképpen meg is oldottuk. Megtehetjük még azt, hogy az összeget zárt alakban is előállítjuk. Az *a)* kérdésnél már láttuk, hogy az n-jegyű számok száma: $9\cdot 10^{n-1}$ így is írható: 10^n-10^{n-1}.

A keresett összeg ennek alapján:

$$S_n=1(10^1-10^0)+2(10^2-10^1)+3(10^3-10^2)+\ldots+n(10^n-10^{n-1}).$$

Bontsuk fel a zárójeleket és 10 egyenlő hatványait vonjuk össze:

(1)
$$\begin{gathered}S_n=-10^0+(1-2)10^1+(2-3)10^2+\ldots+(n-1-n)10^{n-1}+\\+n\cdot 10^n=n\cdot 10^n-(10^0+10^1+10^2+\ldots+10^{n-1}).\end{gathered}$$

A zárójeles rész egy n-tagú mértani sor, az összegképlet felhasználásával:

$$S_n=n\cdot 10^n-\frac{10^n-1}{9}.$$

Ezzel az összeget zárt alakban is előállítottuk.

Gáll Endre (Bp. XI., József A. g. I. o. t.)