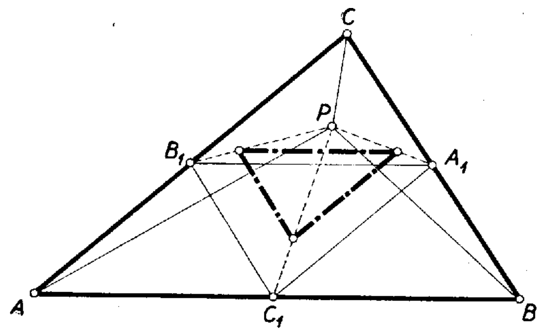
Jelöljük az ABC oldalainak felezőpontjait A_1, B_1, C_1-gyel (l. az ábrát).



A felezőpontok által alkotott $A_1B_1C_{1\triangle}$ hasonló az eredeti ABC háromszöghöz, megfelelő oldalaik párhuzamosak és arányuk $1:2$.

A PAB, PBC és PCA háromszögek súlypontjai rendre a PC_1, PA_1, PB_1 szakaszoknak a P-től a távolság 2/3-ára levő pontok. Ebből következik, hogy a három súlypont által meghatározott háromszög az $A_1B_1C_1$ háromszögnek a P hasonlósági pontra vonatkoztatott $2:3$ arányú kicsinyítésével keletkezik, azaz (az eredetivel összehasonlítva) a súlypontok alkotta háromszög és az ABC háromszög hasonlóak, megfelelő oldalaik párhuzamosak és arányuk $1:3$.

Ha P az ABC háromszög valamelyik oldalán van, akkor a PAB, PCA, PBC háromszögek közül egy vagy kettő egyenesszakasszá fajul. Ha ilyen esetben a súlypontot a háromszög P csúcsát a „szemközti oldal” (= az ABC valamelyik oldala) felezőpontjával összekötő szakasz harmadolópontjaként definiáljuk, állításunk szintén érvényes marad.

Ezzel bizonyítottuk, hogy a szóbanforgó három súlypont által alkotott háromszög nagysága nem függ a P helyzetétől, oldalai mindig párhuzamosak az ABC oldalaival és annak egyharmadára való kicsinyítésével keletkeznek.

Bollobás Béla (Bp. V., Apáczai Csere g. I. o. t.)

Megjegyzések: A feladat – változatlan bizonyítással – általánosítható bármely sokszögre: ha a sokszög oldalainak végpontjait a P ponttal összekötjük, a kapott háromszögek súlypontjai olyan sokszöget határoznak meg, amely hasonló az eredeti sokszög oldalfelező pontjai által alkotott sokszöghöz (megfelelő oldalaik párhuzamosak) és annak $2:3$ arányú kicsinyítésével keletkezik. A P mozgatásával kapott súlypont-sokszögek tehát mind egybevágóak, sőt párhuzamos állásúak. Az alapsokszöghöz azonban ma már nem lesznek általában hasonlók.

Átvihető a feladat állítása térben tetraéderre is.